Le théorème central limite pour la marche linéaire sur le tore et le théorème de renouvellement dans R^d

Jean-Baptiste Boyer

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX

Spécialité : **Mathématiques pures**

École doctorale de mathématiques et informatique (Bordeaux)

Présentée par

Jean-Baptiste Boyer

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'université de Bordeaux

Le théorème central limite pour la marche linéaire sur le tore et le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$.

Soutenue le 28 Juin 2016 devant le jury composé de :

M. Bernard Bercu	Examinateur
M. Philippe Bougerol	Rapporteur
M. Sébastien Gouëzel	Rapporteur
M. Yves Guivarc'h	Examinateur
M. Jean-François Quint	Directeur de thèse

Le théorème central limite pour la marche linéaire sur le tore et le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$.

Jean-Baptiste Boyer

2016

Institut de Mathématiques de Bordeaux,
Université de Bordeaux,
351, cours de la Libération, 33405 Talence cedex

Résumé

La première partie de cette thèse porte sur l'étude de la marche aléatoire sur le tore $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ définie par une mesure de probabilité $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$.

Pour étudier le Théorème Central Limite et la loi du logarithme itéré, nous appliquons la méthode de Gordin qui consiste à se ramener à des martingales. Pour cela, nous utilisons un résultat de Bourgain, Furmann, Lindenstrauss et Mozes nous permettant de résoudre l'équation de Poisson pour des points ayant de bonnes propriétés diophantiennes.

Dans la deuxième partie, nous étudions la marche sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ définie par l'action de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ et nous montrons un résultat de vitesse de convergence dans le théorème de renouvellement de Guivarc'h et Le Page.

Mots clés : Marches aléatoires, méthode de Gordin, équation de Poisson, Théorème Central Limite, produits de matrices aléatoires, théorème de renouvellement.

Abstract

The first part of this thesis deals with the random walk on the torus $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ defined by a probability measure on $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$.

To study the Central Limit Theorem and the Law of the Iterated Logarithm, we apply Gordin's method. To do so, we use a result proved by Bourgain, Furmann, Lindenstrauss and Mozes to solve Poisson's equation at point's having good diophantine properties.

In the second part, we study the walk on $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ defined by the action of $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ and we prove a result about the rate of convergence in Guivarc'h and Le Page's renewal theorem.

Keywords : Random walks, Gordin's method, Poisson's equation, martingales, Central Limit Theorem, products of random matrices, renewal theorem.

À Mélanie,

À Jean,

« Il observait les poissonniers ouvrir les bêtes d'un coup vif, plonger les mains entre les tripes et les viscères, en retirer des morceaux, en couper d'autres, emballer les uns, jeter les autres ... Un vertige le prit. Il n'aurait pû dire si c'était la vue et l'odeur de cette boucherie qui lui soulevaient le cœur ou si cette nausée profonde naissait d'une épiphanie étrange, d'un parallélisme choquant entre le travail de ces hommes et son propre métier de chercheur. Depuis des semaines à présent, il évidait les archives, les documents, conservait les paragraphes, en excluait d'autres, éventrait des manuscrits moisis pour qu'ils lui fournissent quelque chose de comestible. Il se sentit soudain bien humble au milieu de cette fête foraine de nageoires et d'écailles. »

Mélanie Sadler,
Comment les grands de ce monde se promènent en bateau

Remerciements

Table des matières

Notations et conventions

Conventions

Tous les espaces topologiques (considérés) sont munis de leur tribu borélienne et les mesures (considérées) sur ces espaces sont elles-mêmes boréliennes.

Si f est une fonction continue sur un espace topologique $\mathbf{X}$, on note $\operatorname{supp} f$ son support. De même, si ν est une mesure borélienne sur $\mathbf{X}$, on note $\operatorname{supp} \nu$ son support.

Les espaces d'opérateurs sont munis de la norme subordonnée à celle de l'espace vectoriel sur lequel ils agissent.

Si f est une fonction à valeurs complexes sur un ensemble $\mathbf{X}$, on note

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{X}} |f(x)|$$

Si f est une fonction à valeurs complexes sur un espace métrique (X,d) et si $\gamma \in]0,1]$, on note

$$m_\gamma(f) = \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)^\gamma} \text{ et } \|f\|_\gamma = \|f\|_\infty + m_\gamma(f)$$

Par ailleurs, on note $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ l'ensemble des fonctions $\gamma-$hölderiennes sur $\mathbf{X}$ que l'on munit de la norme $\| \, . \, \|_\gamma$.

Pour $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, nous notons

$$\mathbb{C}_\eta = \{z\in\mathbb{C} | |\Re(z)| < \eta\} \text{ et } \overline{\mathbb{C}_\eta} = \{z\in\mathbb{C} | |\Re(z)| \leqslant \eta\}$$

Pour $A, B \subset \mathbb{R}$, nous notons $A \oplus iB = \{a+ib | a\in A,\ b\in B\}$ et en particulier, si $A\subset\mathbb{R}$, alors $A\oplus i\mathbb{R} = \{z\in\mathbb{C}|\Re(z)\in A\}$

Pour $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, nous notons $\widehat{f}$ la transformée de Fourier-Laplace qui est définie pour $z\in\mathbb{C}$ tel que l'intégrale est absolument convergente par

$$\widehat{f}(z) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-zx} \mathrm{d}x$$

Alors, si $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(i\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier devient : pour presque tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(i\xi) e^{i\xi x} \mathrm{d}\xi$$

De la même manière, pour une mesure complexe μ ayant une variation totale finie et pour $z\in\mathbb{C}$ tel que l'intégrale est absolument convergente, nous notons

$$\widehat{\mu}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{-zx} \mathrm{d}\mu(x)$$

Alors, $\widehat{\mu}$ est également la transformée de Fourier-Laplace de μ définie au sens des distributions et nous avons pour tout $x\in\mathbb{R}$ et toute fonction $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\mu * f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\mathrm{d}\mu(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x}\widehat{f}(i\xi)\widehat{\mu}(i\xi)\mathrm{d}\xi$$

Chapitre 1

Introduction

1.1 Marches aléatoires

Soit $\mathbf{X}$ un espace topologique et $\mathbf{G}$ un groupe localement compact, dénombrable à l'infini agissant continûment sur $\mathbf{X}$. Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.

On peut définir une chaîne de Markov sur $\mathbf{X}$ en notant, pour un point $x \in \mathbf{X}$,

$$\begin{cases} X_0 & = & x \\ X_{n+1} & = & g_{n+1}X_n \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $(g_n) \in \mathbf{G}^{\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées de lois ρ.

Soit x un point de $\mathbf{X}$. À une suite $(g_n) \in \mathbf{G}^{\mathbb{N}}$, nous pouvons associer la suite $(x, g_1x, \dots, g_n \dots g_1x, \dots) \in \mathbf{X}^{\mathbb{N}}$ et nous notons $\mathbb{P}_x$ la mesure sur $\mathbf{X}^{\mathbb{N}}$ image de $\rho^{\otimes \mathbb{N}}$ par cette application.

Nous notons P l'opérateur défini pour toute fonction continue et bornée f sur $\mathbf{X}$ et tout $x \in \mathbf{X}$ par

$$Pf(x) = \int_{\mathbf{G}} f(gx)\mathrm{d}\rho(g) = \int_{\mathbf{X}^{\mathbb{N}}} f(X_1)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n))$$

C'est un opérateur positif, qui vérifie $P1 = 1$ (et donc $\|P\|_\infty = 1$) et qui préserve les fonctions continues et bornées sur $\mathbf{X}$. Un tel opérateur sera appelé par la suite *opérateur de Markov-Feller*.

Par ailleurs, pour toute fonction continue et bornée f sur $\mathbf{X}$, tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P^n f(x) = \int_{\mathbf{G}} f(gx)\mathrm{d}\rho^{*n}(g) = \int_{\mathbf{X}^{\mathbb{N}}} f(X_n)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n))$$

Où nous avons noté ρ^{*n} la puissance de convolution $n-$ième de la mesure ρ.

1.2 Marche sur le tore

Dans cette thèse, d est un entier supérieur à 2. Nous nous intéressons dans un premier temps au cas où Γ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ agissant sur le tore $\mathbf{X} := \mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ muni de la mesure de Lebesgue que nous noterons ν par la suite.

Nous voyons facilement que les points rationnels de $\mathbb{T}^d$ ont une $\Gamma-$orbite finie car un élément $g \in \Gamma$ étant à coefficients entiers, il ne peut pas faire croître le dénominateur d'un point rationnel (ni décroître car g^{-1} est encore à coefficients entiers).

Nous aurons besoin de faire une hypothèse garantissant que le groupe engendré par le support de la mesure est assez gros. Soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe de $\mathbf{G} := \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$. Nous dirons que l'action de $\mathbf{H}$ sur $\mathbb{R}^d$ est *fortement irréductible* si $\mathbf{H}$ ne stabilise pas d'union finie de sous-espaces-vectoriels propres de $\mathbb{R}^d$ et qu'elle est *proximale* si $\mathbf{H}$ contient un élément ayant une valeur propre strictement dominante en module. Nous dirons simplement que $\mathbf{H}$ est fortement irréductible (resp. proximal) si son action sur $\mathbb{R}^d$ l'est. De même, nous dirons qu'une mesure est fortement irréductible et proximale si son support engendre un groupe ayant ces propriétés.

Par ailleurs, nous dirons qu'une mesure borélienne de probabilité ρ sur $\mathbf{G}$ a un moment exponentiel si il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g) < +\infty$$

Ces hypothèse permettent notamment de garantir que l'opérateur P a un rayon spectral strictement plus petit que 1 dans l'orthogonal des fonctions constantes dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ (voir Furmann et Shalom dans [FS99], mais aussi par exemple Guivarc'h dans [Gui06] ou encore Bekka et Guivarc'h dans [BG15]). Nous dirons dans ce cas que P a un *trou spectral* dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$. Et nous avons alors que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$, il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ telle que

$$f = g - Pg + \int f \mathrm{d}\nu$$

En particulier, sous ces hypothèses, la loi des grands nombres et le théorème central limite sur le tore sont déjà connus pour presque tout point de départ (voir par exemple [GL78, BIS95] et [DL03]) la variance étant donnée par la formule

$$\sigma^2(f) = \int_{\mathbf{X}} g^2 \mathrm{d}\nu - \int_{\mathbf{X}} (Pg)^2 \mathrm{d}\nu \tag{1.2.1}$$

On définit une application mesurable $\mathbf{X} \to \mathcal{M}^1(\mathbf{X})$ (l'ensemble des mesures boréliennes de probabilité sur $\mathbf{X}$) en notant $\nu_x = \nu$ (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}^d$) si $x \notin \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ et ν_x la mesure équidistribuée sur $\Gamma_\rho x$ si $x \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ (où Γ_ρ est le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par le support de ρ).

Bourgain, Furmann, Lindenstrauss et Mozes ont montré dans [BFLM11] le

Théorème 1.2.1. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\Gamma = \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un groupe agissant fortement irréductiblement et proximalement sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout point $x \in \mathbf{X}$, toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$ et pour $\rho^{\otimes \mathbb{N}}-pt$ (g_n),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int f \mathrm{d}\nu_x$$

où les X_k sont définis dans l'équation (1.1.1).

Nous nous intéressons donc ensuite au comportement de la somme

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu_x\right)$$

Pour cela, nous verrons dans le chapitre 4 que le théorème de [BFLM11] permet d'avoir une vitesse de convergence en fonctions de propriétés diophantiennes du point de départ x dans le cas où la fonction f est hölderienne (on munit le tore de la métrique quotient définie par une norme sur $\mathbb{R}^d$).

Nous verrons ainsi le

Théorème (4.3.4)**.** *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\Gamma = \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un groupe agissant fortement irréductiblement et proximalement sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout $\gamma \in]0,1]$ il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $B \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\beta \in]0, \beta_0[$ nous avons que pour tout point irrationnel $x \in \mathbb{T}^d$ tel que l'inégalité

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-Bq^\beta}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$, et pour toute fonction $\gamma-$hölderienne f sur le tore, en notant $\sigma^2(f) \in \mathbb{R}_+$ la variance définie par l'équation (1.2.1) on a que, avec la notation définie dans l'équation (1.1.1),

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(f)\right)$$

(Si $\sigma^2 = 0$, la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est une masse de Dirac en 0).

De plus, si $\sigma^2(f) \neq 0$ alors

$$\liminf \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(f(X_k) - \int f\mathrm{d}\nu)}{\sqrt{2n\sigma^2(f)\ln\ln n}} = -1 \text{ et } \limsup \frac{\sum_{k=0}^{n-1}(f(X_k) - \int f\mathrm{d}\nu)}{\sqrt{2n\sigma^2(f)\ln\ln n}} = 1$$

et, si $\sigma^2(f) = 0$ (voir le chapitre 3 pour une condition sur le support de ρ garantissant que cela ne peut pas être le cas si f n'est pas constante), alors pour $\nu-$presque tout $x \in \mathbf{X}$, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu)_n$ est bornée dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{P}_x)$.

Remarque 1.2.2. Les points rationnels ayant une orbite finie, le TCL est facile à étudier pour eux puisque cela revient à considérer une chaîne de Markov irréductible et apériodique sur un espace d'états finis. En particulier, si x est rationnel, alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(X_k)-\int f\mathrm{d}\nu_x\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\sigma^2(f,x)\right)$$

où ν_x est la mesure de probabilité stationnaire portée par l'orbite de x et

$$\sigma^2(f,x)=\int_{\mathbf{X}} g^2-(Pg)^2\mathrm{d}\nu_x$$

avec g la fonction de $\mathrm{L}^2(\mathbf{X},\nu_x)$ telle que

$$f=g-Pg+\int f\mathrm{d}\nu_x$$

dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X},\nu_x)$ (cette fonction g existe d'après le théorème de Perron-Frobenius).

Remarque 1.2.3. Notre hypothèse diophantienne est très faible puisqu'elle est vérifiée par exemple pour presque tout point x ou encore dès que x a une coordonnée algébrique. Elle s'explique car les points rationnels ayant un comportement particulier, on imagine qu'un point très proche d'eux se comportera plus mal qu'un point éloigné. Techniquement, nous en avons besoin à un certain point pour garantir que la convergence dans la loi des grands nombres est assez rapide mais nous ne savons pas si elle est nécessaire.

Remarque 1.2.4. En considérant l'équation (1.2.1), on remarque que la nullité de la variance est une condition « presque-partout » et on ne peut pas en déduire une information pour tout point x car notre méthode est fondée sur la recherche d'une fonction g telle que $f=g-Pg+\int f\mathrm{d}\nu$ mais nous ne connaissons pas la régularité de la fonction g que nous construisons. Cependant, dans le cas où le support de ρ n'est pas inclus dans une classe d'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ dont l'action sur le tore n'est pas ergodique, alors l'équation (1.2.1) et la proposition 3.0.5 nous disent que si $\sigma^2(f)=0$ alors $\|g\|_2=\|Pg\|_2$, la fonction g est constante presque partout et donc $f-\int f\mathrm{d}\nu$ est nulle presque partout. Comme cette fonction est continue, elle est nulle partout et f est donc constante. Dans l'autre cas (si le support de ρ est inclus dans une classe d'un sous-groupe dont l'action n'est pas ergodique), nous ne pouvons faire le même type de raisonnement que si nous avons un moyen d'assurer que la fonction g est continue.

Une première remarque pour démontrer ce résultat est que si f est une fonction continue sur $\mathbf{X}$ qui s'écrit $f=g-Pg$ où g est continue sur $\mathbf{X}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)=g(X_0)-g(X_n)+\sum_{k=0}^{n-1}g(X_{k+1})-Pg(X_k)$$

et $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} g(X_{k+1}) - Pg(X_k)$ est une martingale à accroissements bornés. On bénéficie donc de tous les résultats classiques pour les martingales.

On appelle *équation de Poisson* l'équation $f = g - Pg + \int f \mathrm{d}\nu$ d'inconnue g. La méthode consistant à résoudre l'équation de Poisson pour étudier la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k))$ s'appelle *la méthode de Gordin*. C'est la stratégie employée pour démontrer, grâce au trou spectral, le TCL pour presque tout point de départ que nous avons déjà évoqué.

Nous avons déjà vu que sous nos hypothèses, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$, il existe une solution qui est encore dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$. Cependant, nous aimerions plus de régularité dans le cas où la fonction f est elle-même régulière.

Il ne peut pas exister de fonction continue g telle que $f = g - Pg + \int f \mathrm{d}\nu$ en général car cela impliquerait que f ait la même intégrale contre toutes les mesures stationnaires (en particulier, on aurait que $f(0) = \int f \mathrm{d}\nu$). Cependant, nous démontrerons le théorème en montrant que pour une fonction höldérienne f sur le tore, on peut résoudre l'équation de Poisson sur l'ensemble des points ayant de bonnes propriétés diophantiennes (voir le chapitre 4). Par ailleurs, la solution que nous construisons ainsi n'est pas bornée mais est dominée par une fonction $u : \mathbf{X} \to [1, +\infty]$ que nous appelons *fonction de dérive* et qui vérifie l'équation

$$Pu \leqslant au + b$$

pour un certain $a \in]0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}$. Cette équation signifie que si $u(x)$ est grand alors en moyenne, $u(gx)$ est bien plus petit que $u(x)$ ou autrement dit, que la solution g que nous construisons n'est pas bornée mais que la chaîne passe très peu de temps aux endroits où g est grande. Ce contrôle sera suffisant pour notre étude.

Le premier chapitre de cette partie consiste en une étude de l'induction des chaînes de Markov par des temps d'arrêt, celle des fonctions de dérive et par la démonstration du théorème central limite et de la loi du logarithme itéré pour les martingales à différences dominées par une fonction de dérive.

Dans le deuxième chapitre, nous étudierons la nullité de la variance et nous verrons une condition garantissant que pour toute fonction f, la variance dans le théorème central limite s'annule si et seulement si f est constante.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous résoudrons l'équation de Poisson pour les points du tore ayant de bonnes propriétés diophantiennes et nous en déduirons le théorème 4.3.4.

1.3 Le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$

Nous avons vu dans la première partie que la vitesse de convergence dans la loi des grands nombres est liée aux propriétés diophantiennes du point de départ considéré et donc aux moments où la trajectoire passe proche des points rationnels. Nous voulons donc étudier le comportement de la chaîne au voisinage de l'orbite d'un point rationnel. Pour se restreindre dans un premier temps à un modèle simplifié, nous identifions un voisinage de 0 dans le tore à un voisinage du point 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Cela nous mène donc à étudier le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 2$) pour la chaîne de Markov définie par une mesure borélienne sur $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.

Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Nous définissons une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ partant de x par

$$\begin{cases} X_0 & = & x \\ X_{n+1} & = & g_{n+1} X_n \end{cases}$$

où $(g_n) \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires *iid* de loi ρ.

Si ρ a un moment d'ordre 1 [1] et si son support engendre un sous-semi-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ (ce que nous supposerons toujours), alors un résultat de Furstenberg énoncé dans [Fur63] (voir aussi [GR85]) montre que, si $\|\,.\,\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{n} \ln \|g_n \dots g_1 x\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \lambda_\rho := \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \ln \|gx\| \mathrm{d}\rho(g) \mathrm{d}\nu(x) > 0 \quad \rho^{\otimes \mathbb{N}} - \mathrm{ps} \tag{1.3.1}$$

où ν est une mesure borélienne de probabilité $P-$stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ (unique dans ce cas-là d'après [GR85]).

Cela montre en particulier la transience de la marche dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Étant donnée une fonction f continue à support compact sur $\mathbb{R}^d$, nous étudions la fonction

$$\left(x \mapsto Gf(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x f(X_n) \right)$$

La transience de la marche aléatoire et la compacité du support de f montrent que cette fonction est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$) et nous voulons en étudier le comportement en 0. Ce comportement est ce que nous appelons le renouvellement par analogie avec la situation dans $\mathbb{R}$.

Guivarc'h et Le Page ont étudié ce problème dans [GL12]. Ils montrent que si T_ρ, le sous-semi-groupe engendré par le support de ρ, stabilise un cône convexe non trivial dans $\mathbb{R}^d$ alors il existe deux mesures de probabilité stationnaires ergodiques

1. c'est-à-dire que $\int_{\mathbf{G}} \ln \|g\| \mathrm{d}\rho(g)$ est finie.

ν_1 et ν_2 sur $\mathbb{S}^{d-1}$ et l'espace des fonctions continues $P-$invariantes est de dimension deux, une base en étant donné par deux fonctions p_1, p_2 telles que $p_1 + p_2 = 1$ et $p_i|_{\operatorname{supp}\nu_j} = \delta_{i,j}$ où δ est le symbole de Kronecker ; au contraire, si T_ρ ne stabilise pas de cône de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une unique mesure $P-$invariante ν sur $\mathbb{S}^{d-1}$, les fonctions constantes sont les seules fonctions continues $P-$invariantes et nous notons alors p_1 la fonction constante égale à 1.

Dans les deux cas, nous notons Π_0 l'opérateur défini pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)$ à décroissance polynomiale à l'infini [2] et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par

$$\Pi_0 f(x) = \sum_{i=1}^r p_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\|x\|}^{+\infty} f(uy)\frac{\mathrm{d}u}{u}\mathrm{d}\nu_i(y) \tag{1.3.2}$$

où, $r \in \{1,2\}$ est le nombre de fermés $T_\rho-$invariants sur la sphère.

Et alors, nous avons le

Théorème ([GL12])**.** *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathbf{G}$.*

Alors, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et toute fonction continue f sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|^\gamma} \text{ et } \sup_{v\in\mathbb{R}^d} \|v\|^\gamma |f(v)| \text{ sont finis}$$

on a que

$$\lim_{x\to 0}\left(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0\right)f(x) = 0$$

où λ_ρ et Π_0 sont donnés par les équations (1.3.1) et (1.3.2).

Dans la deuxième partie de cette thèse nous étudierons la vitesse de convergence dans le théorème précédent et nous démontrerons le

Théorème (5.2)**.** *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathbf{G}$.*

Pour tout $\gamma > 0$ assez petit et tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe $C, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour toute fonction f à support dans K, $\gamma-$höldérienne sur $\mathbb{R}^d$ et avec $f(0) = 0$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\left|\left(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0\right)f(x)\right| \leqslant \frac{C}{1 + |\ln\|x\||^\alpha}\|f\|_\gamma$$

où λ_ρ et Π_0 sont donnés par les équations (1.3.1) et (1.3.2).

2. il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \|x\|^\gamma |f(x)|$ est fini.

Première partie

Marche sur le tore : cas d'un point de départ diophantien

Chapitre 2

Induction des chaînes de Markov et fonctions de dérive

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions l'induction des chaînes de Markov par des temps d'arrêts. Le but étant de montrer des relations entre l'opérateur initial et l'opérateur induit qui nous permettent de passer facilement d'une chaîne à l'autre.

Puis, nous introduirons un type de fonctions, que nous appellerons fonctions de dérive et nous utiliserons ces fonctions pour démontrer une loi des grands nombre, un théorème central limite et une loi du logarithme itéré pour les suites de différences de martingales dominées par ces fonctions là.

Sommaire

2.1 Induction des chaînes de Markov

Dans ce paragraphe, nous étudions l'induction des chaînes de Markov par des temps d'arrêt et nous démontrons la proposition 2.1.5 qui nous permettra, dans le paragraphe 5.2, de résoudre l'équation de Poisson pour certaines fonctions sur le tore à l'aide du théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$.

2.1.1 Définitions

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace borélien standard $\mathbf{X}$. Nous définissons un opérateur de Markov sur $\mathbf{X}$ en posant, pour toute fonction borélienne positive f et tout point $x \in \mathbf{X}$,

$$Pf(x) = \int_{\mathbf{X}^{\mathbb{N}}} f(X_1) \mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) =: \mathbb{E}_x f(X_1)$$

Soit $\tau : \mathbf{X}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable. Nous disons que τ est un *temps d'arrêt* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{\tau \leqslant n\}$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par les $n+1$ premières coordonnées de $\mathbf{X}^{\mathbb{N}}$.

Étant donné un temps d'arrêt τ, tel que pour tout $x \in \mathbf{X}$, $\mathbb{P}_x(\tau \text{ est fini}) = 1$, nous pouvons étudier la chaîne de Markov $(X_{\tau^n})_{n\in\mathbb{N}}$ où τ^n est défini par

$$\begin{cases} \tau^0((X_n)) & = 0 \\ \tau^{k+1}((X_n)) & = \tau^k((X_n)) + \tau(\theta^{\tau^k((X_n))}(X_n)) \end{cases}$$

où ϑ est le décalage sur $\mathbf{X}^{\mathbb{N}}$.

Nous notons Q l'opérateur de Markov associé à (X_{τ^n}), c'est l'opérateur défini pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbf{X}$ et tout point $x \in \mathbf{X}$ par

$$Qf(x) = \int_{\mathbf{X}^{\mathbb{N}}} f(X_\tau) \mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n))$$

Finalement, nous définissons deux autres opérateurs sur $\mathbf{X}$ en notant, pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbf{X}$ et tout point x de $\mathbf{X}$,

$$Rf(x) = \int_{\mathbf{X}^{\mathbb{N}}} f(X_0) + \cdots + f(X_{\tau-1}) \mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \tag{2.1.1}$$

$$Sf(x) = \int_{\{\tau=1\}} f(X_1) \mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \tag{2.1.2}$$

Définition 2.1.1 (Temps d'arrêt $\theta-$compatible)**.** Nous disons qu'un temps d'arrêt τ est $\theta-$compatible si pour tout $x \in \mathbf{X}$, $\mathbb{P}_x(\{\tau = 0\}) = 0$ et pour $\mathbb{P}_x-$pt $(X_n) \in \mathbf{X}^{\mathbb{N}}$, $\tau((X_n)) \geqslant 2$ implique que $\tau(\theta(X_n)) = \tau((X_n)) - 1$.

Exemple 2.1.2. En général, si τ est un temps d'arrêt et $n \in \mathbb{N}$, le temps d'arrêt $\min(\tau, n)$ n'est pas $\theta-$compatible.

Exemple 2.1.3. Soit $\mathbf{Y}$ un sous ensemble borélien de $\mathbf{X}$ et $\tau_{\mathbf{Y}}$ le temps de premier retour dans $\mathbf{Y}$:

$$\tau_{\mathbf{Y}}((X_n)) = \inf\{n \in \mathbb{N}^*;\ X_n \in \mathbf{Y}\}$$

Alors, $\tau_{\mathbf{Y}}$ est $\theta-$compatible.

De plus, $\tau_{\mathbf{Y}}^n$ comme nous l'avons défini correspond au temps de $n-$ième retour dans $\mathbf{Y}$ (et n'est pas $\theta-$compatible pour $n \geqslant 2$).

Pour $x \in \mathbf{X}$, nous notons $u(x) = \mathbb{E}_x \tau_{\mathbf{Y}}$ et nous dirons que $\mathbf{Y}$ est fortement Harris-récurrent si u est finie sur $\mathbf{X}$. Cela implique en particulier que pour tout x de $\mathbf{X}$, $\tau_{\mathbf{Y}}$ est $\mathbb{P}_x-$ps finie.

Par ailleurs, pour toute fonction borélienne positive f et tout $x \in \mathbf{X}$, nous avons que

$$\begin{aligned}
Qf(x) &= \int_{\{\tau<+\infty\}} f(X_\tau) \mathrm{d}\mathbb{P}_x = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x f(X_n) \mathbb{1}_{\{\tau=n\}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x f(X_n) \mathbb{1}_{\mathbf{Y}^c}(X_1) \dots \mathbb{1}_{\mathbf{Y}^c}(X_{n-1}) \mathbb{1}_{\mathbf{Y}}(X_n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (PM_{\mathbf{Y}^c})^{n-1} PM_{\mathbf{Y}}(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (PM_{\mathbf{Y}^c})^{n} PM_{\mathbf{Y}}(f)(x) \qquad (2.1.3)
\end{aligned}$$

Où nous avons noté $M_{\mathbf{Y}^c}$ (resp. $M_{\mathbf{Y}}$) l'opérateur de multiplication par $\mathbb{1}_{\mathbf{Y}_c}$ (resp. $\mathbb{1}_{\mathbf{Y}}$). Nous pouvons également calculer

$$\begin{aligned}
Rf(x) &= \int_{\{\tau<+\infty\}} f(X_0) + \dots + f(X_{\tau-1}) \mathrm{d}\mathbb{P}_x = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x f(X_n) \mathbb{1}_{\{\tau \geqslant n+1\}} \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x f(X_n) \mathbb{1}_{\mathbf{Y}^c}(X_1) \dots \mathbb{1}_{\mathbf{Y}^c}(X_n) \\
&= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} (PM_{\mathbf{Y}^c})^{n}(f)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (PM_{\mathbf{Y}^c})^{n}(f)(x) \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

et finalement,

$$Sf(x) = \int_{\{\tau=1\}} f(X_1) \mathrm{d}\mathbb{P}_x = \int f(X_1) \mathbb{1}_{\mathbf{Y}}(X_1) \mathrm{d}\mathbb{P}_x = PM_{\mathbf{Y}} f(x) \qquad (2.1.5)$$

Et donc, en remarquant que $M_{\mathbf{Y}} + M_{\mathbf{Y}^c} = I_d$, nous obtenons que $(R+Q)f = (I_d + RP)f$, $RSf = Qf$, $(P-S)Qf = PM_{\mathbf{Y}^c}Qf = Qf - Sf$ et $(P-S)Rf = PM_{\mathbf{Y}^c}Rf = Rf - f$.

Notons que $P, Q, R, S, P-S, Q-S$ et $R - I_d$ sont des opérateurs positifs donc les calculs que nous avons effectué font bien sens puisque f est supposée positive.

Exemple 2.1.4. Un exemple de temps d'arrêt $\vartheta-$compatible qui n'est pas un temps de retour dans un sous-ensemble récurrent est le temps de première réflexion pour la marche réfléchie sur $\mathbb{R}_+$ étudiée par exemple dans [PW06].

La proposition suivante généralise les relations que nous venons de voir dans le cas des temps de retour à tout temps d'arrêt $\theta-$compatible.

Proposition 2.1.5. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace borélien standard et* (X_n) *une chaîne de Markov sur* $\mathbf{X}$*. Soit* τ *un temps d'arrêt* $\theta-$*compatible tel que pour tout* $x \in \mathbf{X}$*,* τ *est* $\mathbb{P}_x-$*ps fini.*

Alors, pour toute fonction borélienne positive f *sur* $\mathbf{X}$*, nous avons*

$$\begin{aligned}(R+Q)f &= (I_d + RP)f \\ (I_d + PR)f &= (I_d + S)Rf \\ (I_d + S)Qf &= (S + PQ)f \\ RSf &= Qf\end{aligned}$$

Remarque 2.1.6. La première et la troisième relations peuvent également s'écrire (dans le cas où les fonctions Rf, RPf, Qf, PQf et SQf sont bien définies)

$$R(I_d - P)f = (I_d - Q)f \text{ et } (I_d - P)Qf = S(I_d - Q)$$

et on voit que les opérateurs R et S permettent de lier la chaîne initiale et la chaîne induite.

Remarque 2.1.7. La deuxième équation s'écrit (dans le cas où les fonctions Rf, PRf et SRf sont bien définies)

$$f = (I_d - P)Rf + SRf$$

Ainsi, si f est telle que $SRf = 0$, la fonction Rf est solution de l'équation de Poisson. Nous utiliserons cela pour résoudre l'équation sur le tore pour un certain type de fonctions dans la proposition 5.2.1.

Démonstration. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbf{X}$ et $x \in \mathbf{X}$.

En utilisant la propriété de Markov et la $\theta-$compatibilité de τ nous avons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_x f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau \geqslant n\}} = \mathbb{E}_x Pf(X_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau \geqslant n\}}$$

et donc,

$$\begin{aligned}(R+Q)f(x) = \mathbb{E}_x f(X_0) + \cdots + f(X_\tau)\mathrm{d}\mathbb{P}_x &= \mathbb{E}_x \sum_{n=0}^{+\infty} f(X_n)\mathbb{1}_{\{\tau \geqslant n\}} \\ &= f(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x Pf(X_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau \geqslant n\}} = f(x) + RPf(x)\end{aligned}$$

De plus, comme τ est $\theta-$compatible,

$$\int_{\{\tau \geqslant 2\}} Rf(X_1)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) = \int_{\{\tau \geqslant 2\}} f(X_1) + \cdots + f(X_{\tau-1})\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n))$$

Donc,

$$\begin{aligned}
f(x)+PRf(x) &= f(x) + \int_{\{\tau=1\}} Rf(X_1)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) + \int_{\{\tau\geqslant 2\}} Rf(X_1)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \\
&= f(x) + SRf(x) + \int_{\{\tau\geqslant 2\}} f(X_1) + \cdots + f(X_{\tau-1})\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \\
&= SRf(x) + \int f(X_0) + \cdots + f(X_{\tau-1})\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) = SRf(x) + Rf(x)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition de S, $\int_{\{\tau=1\}} f(X_1)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) = \int_{\{\tau=1\}} f(X_\tau)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n))$ et donc

$$\begin{aligned}
Sf(x) + PQf(x) &= \int \mathbb{1}_{\{\tau=1\}}\left(f(X_1) + Qf(X_1)\right) + \mathbb{1}_{\{\tau\geqslant 2\}} f(X_\tau)\mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \\
&= SQf(x) + Qf(x)
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_x Sf(X_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant n\}} = \int_{\{\tau=n+1\}} f(X_{n+1})$$

Donc,

$$\begin{aligned}
RSf(x) &= \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{+\infty} Sf(X_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant n\}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}_x Sf(X_{n-1})\mathbb{1}_{\{\tau\geqslant n\}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_x f(X_{n+1})\mathbb{1}_{\{\tau=n+1\}} = Qf(x)
\end{aligned}$$ □

Une application de ces méthodes est le

Lemme 2.1.8. *Soit* $\mathbf{X}$ *un espace borélien standard et* (X_n) *une chaîne de Markov sur* $\mathbf{X}$.

Soit ν *une mesure borélienne de probabilité* $P-$*invariante sur* $\mathbf{X}$ *et* τ *un temps d'arrêt* $\theta-$*compatible tel que pour* ν*-pt* $x \in \mathbf{X}$, $\mathbb{P}_x(\tau < +\infty) = 1$.

Alors, pour toute fonction borélienne positive f *sur* $\mathbf{X}$, *nous avons que*

$$\int_{\mathbf{X}} f\mathrm{d}\nu = \int_{\mathbf{X}} SRf\mathrm{d}\nu$$

Démonstration. D'après la proposition 2.1.5, $f + PRf = Rf + SRf$. Donc si f est telle que $Rf \in \mathrm{L}^1(\mathbf{X},\nu)$, comme ν is $P-$invariante, nous obtenons le lemme.

Si $f \notin \mathrm{L}^1(\mathbf{X},\nu)$, nous allons obtenir le lemme en approchant SRf.

Premièrement, nous supposons que f est bornée. En général, $Rf \notin \mathrm{L}^1(\mathbf{X},\nu)$ donc nous l'approchons avec une suite de fonctions intégrables.

Plus précisément, pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons R_n l'opérateur défini comme R mais associé au temps d'arrêt $\min(n,\tau)$ (qui n'est pas $\theta-$compatible en général).

C'est à dire que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbf{X}$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$R_n f(x) = \mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{\min(\tau,n)-1} f(X_k)$$

Comme $\{\min(\tau, n) = 1\} = \{\tau = 1\}$ pour $n \geqslant 2$, l'opérateur S associé à $\min(\tau, n)$ ne dépends pas de n pour $n \geqslant 2$.

Comme $\min(\tau, n)$ n'est pas $\theta-$compatible, nous ne pouvons pas utiliser la proposition 2.1.5, mais nous avons, pour $n \geqslant 2$, que

$$\begin{aligned}
PR_n f(x) &= \mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{\min(\tau\circ\theta,n)-1} f(X_{k+1}) \\
&= SR_n f(x) + \int_{\{\tau\geqslant 2\}} \sum_{k=0}^{\min(\tau-1,n)-1} f(X_{k+1}) \mathrm{d}\mathbb{P}_x \\
&= SR_n f(x) + \int_{\{\tau\geqslant 2\}} \sum_{k=1}^{\min(\tau,n+1)-1} f(X_k) \mathrm{d}\mathbb{P}_x = SR_n f + R_{n+1} f - f
\end{aligned}$$

Et, comme f bornée, pour tout $x \in \mathbf{X}$, $|R_n f(x)| \leqslant n\|f\|_\infty$ et donc $R_n f$ est intégrable puisque ν est de probabilité. Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\int SR_n f - f \mathrm{d}\nu = \int PR_n f - R_{n+1} f \mathrm{d}\nu = \int R_n f - R_{n+1} f \mathrm{d}\nu \\
= \int f(X_n) \mathbb{1}_{\{\tau\geqslant n\}} \mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \mathrm{d}\nu(x)
\end{aligned}$$

Donc, comme pour $\nu-$presque-tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_x(\tau \geqslant n) = 1 - \mathbb{P}_x(\tau < +\infty) = 0$$

nous avons que

$$\left| \int SR_n f - f \mathrm{d}\nu \right| \leqslant \|f\|_\infty \int_X \mathbb{P}_x(\{\tau \geqslant n\}) \mathrm{d}\nu(x) \to 0 \text{ (par convergence monotone)}$$

et nous obtenons le lemme espéré pour toute fonction bornée.

Si f n'est pas bornée et est positive, nous prenons une suite croissante de fonctions bornées qui converge vers f et nous avons une fois encore le résultat espéré par convergence monotone. □

Exemple 2.1.9. Si τ est le temps de retour dans un sous-ensemble fortement Harris-récurrent $\mathbf{Y}$, alors l'opérateur S devient, pour toute fonction mesurable positive f et tout point x de $\mathbf{X}$, $Sf(x) = P(f\mathbb{1}_{\mathbf{Y}})(x)$. De plus, pour toute mesure $P-$invariante ν et toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{X}, \nu)$, telle que Rf est $\nu-$p.s. finie, nous avons que $\int_{\mathbf{X}} SRf \mathrm{d}\nu = \int_{\mathbf{Y}} Rf \mathrm{d}\nu$.

Et donc le lemme précédent nous montre que

$$\int_{\mathbf{Y}} Rf \mathrm{d}\nu = \int_{\mathbf{X}} f \mathrm{d}\nu$$

En particulier, avec $f = 1$, nous obtenons que $\int_{\mathbf{Y}} \mathbb{E}\tau \mathrm{d}\nu = \nu(\mathbf{X})$. C'est le lemme de Kac ([Kac47]) pour les systèmes dynamiques.

2.1.2 Application à l'étude des mesures invariantes

Dans ce paragraphe, $\mathbf{X}$ est un espace borélien standard muni de sa tribu borélienne et toutes les mesures considérées sont boréliennes. Nous supposons qu'il existe (au moins) une mesure de probabilité $P-$invariante sur $\mathbf{X}$.

Nous fixons également un temps d'arrêt $\theta-$compatible τ tel que pour tout x de $\mathbf{X}$, $\mathbb{E}_x\tau$ est finie.

Lemme 2.1.10. *Soit ν une mesure borélienne finie non nulle $P-$invariante sur $\mathbf{X}$. Alors, $S^*\nu$ est une mesure borélienne finie non nulle $Q-$invariante sur $\mathbf{X}$.*

De plus, $R^*S^*\nu = \nu$ et $S^*\nu$ est absolument continue par rapport à ν.

Démonstration. Premièrement, pour toute fonction borélienne positive et bornée f sur $\mathbf{X}$ et tout $x \in \mathbf{X}$, $Sf(x) \leqslant Pf(x)$.

Donc, $\int Sf \mathrm{d}\nu \leqslant \int Pf \mathrm{d}\nu = \int f \mathrm{d}\nu$ puisque ν est $P-$invariante et f est bornée. Cela montre que $S^*\nu$ est une mesure finie et absolument continue par rapport à ν.

De plus, nous avons vu dans le lemme 2.1.8 que pour toute fonction borélienne positive f sur $\mathbf{X}$, $\int SRf \mathrm{d}\nu = \int f \mathrm{d}\nu$ et donc $R^*S^*\nu = \nu$.

Ensuite, nous devons montrer que $S^*\nu(\mathbf{X}) > 0$. Mais, si $S^*\nu = 0$, alors $\nu = R^*S^*\nu = 0$ et cela contredit notre hypothèse. □

Lemme 2.1.11. *Soit μ une mesure borélienne non nulle $Q-$invariante sur $\mathbf{X}$. Alors, $R^*\mu$ est une mesure borélienne non nulle et $P-$invariante sur $\mathbf{X}$.*

De plus, $S^*R^*\mu = \mu$ et μ est absolument continue par rapport à $R^*\mu$.

Finalement, si $QR(1)$ est borné sur $\mathbf{X}$, alors $R^*\mu$ est une mesure finie si et seulement si μ l'est.

Remarque 2.1.12. La condition $QR1$ bornée sur $\mathbf{X}$ est raisonnable.

En effet, en utilisant les mêmes notations que dans la remarque 2.1.3, nous appelons $\mathbf{Y}$ linéairement récurrent si $\sup_{y\in\mathbf{Y}} \mathbb{E}_y\tau_{\mathbf{Y}}$ est fini.

Dans ce cas, $R1(x) = \mathbb{E}_x\tau_{\mathbf{Y}}$ et $QR1(x) = \mathbb{E}_x R1(X_{\tau_{\mathbf{Y}}}) \leqslant \sup_{y\in\mathbf{Y}} \mathbb{E}_y\tau_{\mathbf{Y}}$ puisque que pour tout $x \in \mathbf{X}$, $\mathbb{P}_x(X_{\tau_{\mathbf{Y}}} \in \mathbf{Y}) = 1$ par définition de $\tau_{\mathbf{Y}}$.

Démonstration. Pour montrer que $R^*\mu$ est une mesure, nous devons juste prouver qu'elle est $\sigma-$additive.

Soit (A_n) une famille de sous-ensembles boréliens de $\mathbf{X}$ disjoints deux-à-deux et soit $n \in \mathbb{N}$. Comme R est un opérateur linéaire, nous avons que $\int R(\mathbb{1}_{\cup_{k=0}^n A_k})\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^n \int R\mathbb{1}_{A_k}\mathrm{d}\mu$, donc, $R^*\mu$ est finiment-additive. Mais, d'après le théorème de convergence monotone, le membre de gauche de cette équation converge vers $\int R(\mathbb{1}_{\cup A_n})\mathrm{d}\mu$ et cela montre que $R^*\mu$ est $\sigma-$additive.

De plus, pour toute fonction borélienne positive et bornée f sur $\mathbf{X}$, nous avons que $f \leqslant Rf$, donc $\mu(f) \leqslant \mu(Rf)$ et μ est absolument continue par rapport à $R^*\mu$ et $R^*\mu(X) > 0$.

Par ailleurs, la proposition 2.1.5 montre que pour toute fonction borélienne positive f, $Rf + Qf = f + RPf$. Appliquant cela à $f = \mathbb{1}_A$ pour une partie borélienne A, et prenant l'intégrale contre μ, nous obtenons que $\int R\mathbb{1}_A + Q\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu = \int \mathbb{1}_A + RP\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu$. Mais, μ est $Q-$invariante donc si $\mu(A)$ est finie, nous obtenons que $\int R\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu = \int RP\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu$. Si $\mu(A)$ est infinie, le résultat est toujours vrai car $\int R\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu = \mu(A) = Q^*\mu(A) = \int RP\mathbb{1}_A\mathrm{d}\mu = +\infty$. Donc, pour toute ensemble borélien A, $R^*\mu(A) = P^*R^*\mu(A)$ ce qui montre que, $R^*\mu$ est $P-$invariante.

Comme $RS = Q$ d'après la proposition 2.1.5 et comme nous avons supposé que la mesure μ est $Q-$invariante, nous obtenons directement que $S^*R^*\mu = \mu$.

Pour montrer le dernier point du lemme, supposons que la fonction $(x \mapsto QR(1)(x))$ est bornée sur $\mathbf{X}$.

Si $R^*\mu$ est finie alors μ aussi puisque $\mu(\mathbf{X}) \leqslant R^*\mu(\mathbf{X})$.

Réciproquement, si μ est une mesure finie, remarquons que puisqu'elle est $Q-$invariante, nous avons que

$$R^*\mu(\mathbf{X}) = \int 1\mathrm{d}(R^*\mu) = \int R1\mathrm{d}\mu = \int QR1\mathrm{d}\mu \leqslant \|QR1\|_\infty \mu(\mathbf{X}) < +\infty$$

Donc $R^*\mu$ est bien une mesure finie sur $\mathbf{X}$. □

Nous avons vu dans les lemmes précédents que les opérateurs R et S agissent sur les mesures invariantes. Comme ce sont des opérateurs linéaires positifs et comme l'ensemble des mesures invariantes est convexe, il est naturel de montrer que ces opérateurs préservent aussi les points extrémaux de ce convexe ; ces points extrémaux étant ce que nous avons appelé les mesures ergodiques (dans un certain sens puisque R et S ne préservent pas les mesures de probabilité).

Corollaire 2.1.13. *Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace métrique complet séparable et τ un temps d'arrêt $\theta-$compatible tel que pour tout $x \in \mathbf{X}$, $\mathbb{E}_x\tau$ est finie.*

Définissons P, Q, R et S comme précédemment et supposons que $QR1$ est bornée sur $\mathbf{X}$.

Alors, S^* et R^* sont des bijections réciproques entre l'ensemble des mesures finies $P-$invariantes et celui des mesures finies $Q-$invariantes qui préservent l'ergodicité.

Démonstration. Nous avons dejà vu dans les lemmes 2.1.10 et 2.1.11 que S^* (resp R^*) envoie les mesures finies non nulles $P-$invariantes (resp. $Q-$invariant) sur les $Q-$invariantes (resp. $P-$invariantes) et que ces opérations sont mutuellement réciproques.

Ainsi, il ne reste plus qu'à voir que l'image par S^* ou R^* d'une mesure de probabilité ergodique est encore ergodique (après renormalisation). Pour faire cela, nous utilisons la linéarité de S^* et R^* et le fait que les mesures ergodiques sont les points extrémaux de l'ensemble des mesures invariantes pour une chaîne de Markov sur un espace métrique complet séparable.

Soit ν une mesure borélienne finie non nulle et $P-$ergodique sur $\mathbf{X}$. Nous supposons sans perte de généralité que ν est une mesure de probabilité. Nous avons vu dans le lemme 2.1.10 que $S^*\mu$ est une mesure finie non nulle $Q-$invariante.

Supposons que $S^*\nu = S^*\nu(\mathbf{X})(t\mu_1 + (1-t)\mu_2)$ où μ_1 et μ_2 sont deux mesures de probabilité $Q-$invariantes et $t \in [0,1]$.

Alors, nous avons que $\nu = R^*S^*\nu = S^*\nu(X)(tR^*\mu_1 + (1-t)R^*\mu_2)$. Mais ν est ergodique donc $\frac{1}{R^*\mu_1(\mathbf{X})}R^*\mu_1 = \frac{1}{R^*\mu_2(\mathbf{X})}R^*\mu_2$. Et, en appliquant S^* une fois encore, nus obtenons que $\nu_1 = \nu_2$, et donc, $S^*\mu$ est $Q-$ergodique.

De même, si μ est une mesure borélienne de probabilité $Q-$ergodique alors $R^*\mu$ est $P-$ergodique. □

2.2 Fonctions de dérive

Dans ce paragraphe, nous étudions un type de fonctions qui nous permettra de contrôler les excursions de chaînes de Markov.

Soit (X_n) une chaîne de Markov sur un espace borélien standard $\mathbf{X}$.

Nous allons étudier un type de fonctions que nous appelons « fonctions de dérive » et qui nous permettront de contrôler la chaîne de Markov. Ces fonctions sont étudiées par de nombreux auteurs et notre principale référence est le livre de Meyn et Tweedie [MT93] (voir aussi [GM96]).

Le but de ce paragraphe et de voir ce que l'on garde des résultats de Meyn et Tweedie quand on enlève l'hypothèse d'irréductibilité (qui n'est pas satisfaite sur le tore pour la marche qui nous intéresse).

Définition 2.2.1 (Fonctions de dérive)**.** Soit $u : \mathbf{X} \to [1, +\infty]$ une fonction borélienne et C un borélien de $\mathbf{X}$.

Nous dirons que (u, C) est une fonction de dérive si u est bornée sur C et si il existe une constante $b \in \mathbb{R}$ telle que

$$Pu \leqslant u + b\mathbb{1}_C$$

Souvent, nous dirons simplement que u est une fonction de dérive en sous-entendant l'ensemble C.

Remarque 2.2.2. Dans la littérature, on appelle fonction de Lyapunov une fonction mesurable positive v telle que $Pv \leqslant v$ et notre condition de contrôle de la dérive est un relâchement de cette condition.

Remarque 2.2.3. Meyn et Tweedie ne supposent pas que la fonction u est bornée sur C mais ils font l'hypothèse que C est un *petite-set* ce qui leur permet de démontrer à posteriori que l'on peut remplacer C par un borélien sur lequel u est borné.

Comme nous supposons que $Pu \leqslant u + b\mathbb{1}_C$, nous pouvons nous intéresser aux fonctions boréliennes f telles que, sur l'ensemble $\{u < +\infty\}$,

$$|f| \leqslant u - Pu + b\mathbb{1}_C \tag{2.2.1}$$

Nous verrons par la suite que nous contrôlons très bien la suite des $(P^n f)$ (ou plus exactement, les séries dont les termes généraux font intervenir les $P^n f$ puisqu'alors les sommes de termes de la forme $P^n(u - Pu)$ sont télescopiques).

Nous définissons donc, pour $p \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathcal{E}_u^p := \left\{ f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ est borélienne et il existe } M \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que} \\ \forall x \in \mathbf{X}_u \ |f(x)| \leqslant M\left(u(x) - Pu(x) + b\mathbb{1}_C(x)\right)^{1/p} \end{array} \right\}$$

où nous avons noté $\mathbf{X}_u := \{x \in \mathbf{X} \mid u(x) < +\infty\}$.

Et, pour $f \in \mathcal{E}_u^p$, nous notons

$$\|f\|_{\mathcal{E}_u^p} = \inf\left\{M \in \mathbb{R} \middle| \forall x \in \mathbf{X},\ |f(x)| \leqslant M(u - Pu + b\mathbb{1}_C)^{1/p}\right\}$$

Remarque 2.2.4. L'espace $(\mathcal{E}_u^p, \|\,.\,\|_{\mathcal{E}_u^p})$ est un espace de Banach et si la fonction $u - Pu + b\mathbb{1}_C$ ne s'annule pas, on a alors que

$$\|f\|_{\mathcal{E}_u^p} = \left(\sup_{x \in \mathbf{X}_u} \frac{|f(x)|^p}{u(x) - Pu(x) + b\mathbb{1}_C}\right)^{1/p}$$

De même, nous notons, pour $p \in [1, +\infty[$,

$$\mathcal{F}_u^p := \left\{f : \mathbf{X} \to \mathbb{R} \middle| f \text{ est borélienne et } \exists M, \forall x \in \mathbf{X},\ |f(x)| \leqslant Mu(x)^{1/p}\right\}$$

et, pour $f \in \mathcal{F}_u^p$,

$$\|f\|_{\mathcal{F}_u^p} = \sup_{x \in \mathbf{X}} \frac{|f(x)|}{u(x)^{1/p}}$$

Remarque 2.2.5. Le paramètre b joue peu de rôle dans notre étude des fonctions de dérive. De plus, si $b < b' \leqslant b''$ et $Pu \leqslant u + b\mathbb{1}_C$, alors on a également que $Pu \leqslant u + b'\mathbb{1}_C \leqslant u + b''\mathbb{1}_C$. Et alors, l'espace $\mathcal{E}_u^p$ défini avec b' et celui défini avec b'' sont les mêmes et les normes sont équivalentes et de même pour $\mathcal{F}_u^p$. Les espaces définis avec b et b' pourraient ne pas être les mêmes par exemple si $u - Pu + b\mathbb{1}_C$ s'annule sur $\mathbf{X}_u$.

Un premier exemple d'utilisation du contrôle de la dérive est donné dans le

Lemme 2.2.6 (Théorème 2.1 de [GM96])**.** *Soit u une fonction de dérive, τ un temps d'arrêt et $f \in \mathcal{E}_u^1$, alors pour tout $x \in \mathbf{X}$,*

$$\left|\mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{\tau-1} f(X_k)\right| \leqslant \left(u(x) + b\mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{\tau-1} \mathbb{1}_C(X_k)\right) \|f\|_{\mathcal{E}_u^1}$$

Deux cas particuliers importants sont quand $1 \in \mathcal{E}_u^1$ et $u \in \mathcal{E}_u^1$. Nous allons les étudier dans les deux lemmes suivants.

Lemme 2.2.7. *Soit u une fonction de dérive telle que $1 \in \mathcal{E}_u^1$ et soit τ_C le temps de retour en C (voir l'exemple 2.1.3).*

Alors,

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \tau_C < +\infty$$

Réciproquement, soit C un borélien de $\mathbf{X}$ et notons τ_C le temps de retour en C et $u(x) = \mathbb{E}_x \tau_C$. Supposons que

$$\sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \tau_C < +\infty \text{ et } \lim_{M \to +\infty} \sup_{\substack{x \in \mathbf{X} \\ \mathbb{E}_x \tau_C \geqslant M}} \mathbb{P}_x(\tau_C = 1) = 0$$

Alors, il existe un ensemble borélien C' tel que (u, C') est une fonction de dérive et $1 \in \mathcal{E}_u^1$.

Démonstration. Nous supposons que $1 \leqslant u - Pu + b\mathbb{1}_C$, nous notons τ_C le temps de retour en C et alors, d'après le lemme précédent,

$$\mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{\tau_C - 1} 1 = \mathbb{E}_x \tau_C \leqslant u(x) + b\mathbb{E}_x \sum_{k=0}^{\tau_C - 1} \mathbb{1}_C(X_k) = u(x) + b\mathbb{1}_C$$

et comme u est bornée sur C, nous obtenons la première partie du lemme.

Réciproquement, calculons

$$\begin{aligned} Pu(x) &= \int_{\{\tau_C \geqslant 2\}} \tau_C - 1 \mathrm{d}\mathbb{P}_x + \int_{\{\tau_C = 1\}} \mathbb{E}_{X_1} \tau_C \mathrm{d}\mathbb{P}_x \\ &= u - 1 + \int_{\{\tau_C = 1\}} u(X_1) \mathrm{d}\mathbb{P}_x((X_n)) \leqslant u - 1 + b\mathbb{P}_x(\tau_C = 1) \end{aligned}$$

où nous avons noté $b = \sup_{x \in C} \mathbb{E}_x \tau_C$.

Soit M tel que

$$\sup_{u(x) \geqslant M} \mathbb{P}_x(\tau_C = 1) \leqslant \frac{1}{2b}$$

et notons $X_M = \{u \leqslant M\}$. Alors,

$$Pu \leqslant u - 1 + b\mathbb{1}_{X_M} + \frac{1}{2} = u - \frac{1}{2} + b\mathbb{1}_{X_M}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 2.2.8. *Soit u une fonction de dérive.*

Les assertions suivantes sont équivalentes

— *Il existe $a \in [0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Pu \leqslant au + b\mathbb{1}_C$;*

— *La fonction u appartient à l'espace $\mathcal{E}_u^1$.*

Dans ce cas, nous dirons que u est une fonction de dérive exponentielle.

Démonstration. Premièrement, si $a \in [0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$ sont tels que $Pu \leqslant au + b\mathbb{1}_C$, alors $(1-a)u \leqslant u - Pu + b\mathbb{1}_C$ et donc, $u \in \mathcal{E}_u^1$.

Réciproquement, si $u \in \mathcal{E}_u^1$, alors en écrivant $u \leqslant \|u\|_{\mathcal{E}_u^1}(u - Pu + b\mathbb{1}_C)$ nous obtenons, comme $\|u\|_{\mathcal{E}_u^1} \neq 0$, que

$$Pu \leqslant \left(1 - \frac{1}{\|u\|_{\mathcal{E}_u^1}}\right) u + b\mathbb{1}_C$$

ce qui termine la preuve. □

Dans le lemme suivant, nous montrons que l'espace $\mathcal{E}_u^p$ est inclus dans les espaces de fonctions intégrables par rapport aux mesures stationnaires de la chaîne de Markov originale.

Lemme 2.2.9. *Soit u une fonction de dérive et soit ν une mesure borélienne de probabilité $P-$invariante sur $\mathbf{X}$ telle que $\nu(u < +\infty) = 1$.*

Alors, l'opérateur identité défini de $\mathcal{E}_u^p(\mathbf{X})$ dans $\mathcal{L}^p(\mathbf{X}, \nu)$ est continu.

Démonstration. (cf. le lemme 3.8 de [BQ13])

Soit $f \in \mathcal{E}_u^p$, $x \in \mathbf{X}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors, par définition de $\mathcal{E}_u^p$, $|f|^p(x) \leqslant \|f\|_{\mathcal{E}_u^p}^p(u - Pu + b)(x)$, et donc,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k(|f|^p)(x) \leqslant \frac{\|f\|_{\mathcal{E}_u^p}^p}{n}(u - P^n u + nb) \leqslant \|f\|_{\mathcal{E}_u^p}^p(\frac{1}{n}u(x) + b)$$

Mais, alors, d'après le théorème ergodique de Chacon-Ornstein (voir par exemple le théorème 3.4 du chapitre 3 du livre de Krengel [Kre85]), il existe une fonction

$P-$invariante f^* qui est positive et telle que $\int |f|^p \mathrm{d}\nu = \int f^* \mathrm{d}\nu$ et, pour $\nu-$presque tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P^k |f|^p(x) \to f^*(x)$$

Mais, puisque u est finie $\nu-$p.s., nous obtenons que $f^*(x) \leqslant b\|f\|^p_{\mathcal{E}^p_u}$ pour $\nu-$presque tout $x \in \mathbf{X}$. Et donc, $f^* \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{X},\nu) \subset \mathrm{L}^1(\mathbf{X},\nu)$ puisque nous avons supposé que ν est une mesure finie. Cela montre donc que, $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{X},\nu)$ et que $\|f\|_{\mathcal{L}^p(\mathbf{X},\nu)} \leqslant b^{1/p}\|f\|_{\mathcal{E}^p_u}$. □

Pour terminer cette section, nous faisons une remarque sur la résolution de l'équation de Poisson dont nous ne nous servirons pas vraiment dans cette thèse mais qui montre que l'on peut résoudre l'équation de Poisson pour la chaîne originale lorsque l'on sait la résoudre pour la chaîne induite. C'est la méthode utilisée par Glynn et Meyn pour résoudre l'équation de Poisson dans le cas où l'ensemble C est un petite-set (ce qui implique essentiellement que l'opérateur induit Q est quasicompact dans $\mathrm{L}^\infty(C)$).

Remarque 2.2.10. Soit $\tau_{\mathbf{Y}}$ le temps de retour dans un ensemble fortement Harris-récurrent $\mathbf{Y}$ (voir 2.1.3) et Q, R et S les opérateurs associés. Nous notons $u(x) = \mathbb{E}_x\tau_{\mathbf{Y}}$.

Soit $f \in \mathcal{E}^1_u$ et supposons que l'on puisse résoudre l'équation de Poisson associée à Rf pour l'opérateur induit Q. C'est à dire qu'il existe une fonction g définie et bornée sur $\mathbf{Y}$ telle que $g - Qg = Rf$ sur $\mathbf{Y}$, alors $\hat{g} = Rf + Qg$ est bien définie sur $\mathbf{X}$ car, par définition de $\tau_{\mathbf{Y}}$, pour tout $x \in \mathbf{X}$, $\mathbb{P}_x(\mathbf{X}_\tau \in \mathbf{Y}) = 1$.

De plus, d'après le lemme 2.2.6, pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$|\widehat{g}(x)| \leqslant \|g\|_\infty + \|f\|_{\mathcal{E}^1_u}(u(x) + b)$$

Et cela montre que $g \in \mathcal{F}^1_u$. Enfin, cette fonction g est solution de l'équation de Poisson. En effet, nous pouvons faire le calcul suivant en utilisant les relations de la proposition 2.1.5 :

$$\begin{aligned}(I_d - P)\widehat{g} &= (I_d - P)(Rf + Qg) = (I_d - P)Rf + (I_d - P)Qg \\ &= (I_d - SR)f + S(I_d - Q)g = f + S(g - Qg - Rf) \\ &= f\end{aligned}$$

Où les calculs sont autorisés car tous les termes apparaissant sont finis quand u est finie.

2.3 La loi des grands nombres, le théorème central limite et la loi du logarithme itéré pour les martingales dominées par des fonctions de dérive

Dans cette section, nous démontrons trois des résultats classiques de probabilité pour des suites de différences de martingales dominées par une fonction de dérive. Ces résultats étant connus pour des martingales à accroissements bornées, nous montrons que nous pouvons les étendre car le contrôle par la fonction de dérive revient à travailler avec des fonctions comme si elles étaient bornées.
En particulier, nous verrons que le théorème central limite et la loi du logarithme itéré pour les martingales sont valides dès que l'on peut assurer la convergence de la variance : ce sera l'objet du corollaire 2.3.9.

Remarque 2.3.1. Dans cette section, nous faisons souvent des hypothèses telles que « $f \in \mathcal{E}_u^p$ pour un certain $p > 1$ ». Le lecteur ne doit pas prendre peur devant de telles hypothèses puisque les fonctions u que nous pouvons construire dans les exemples viennent en famille, on peut les perturber un peu et donc si f est dominée par une fonction de dérive, alors il en existera une autre qui dominera f^p.

Avant d'énoncer et de démontrer le corollaire 2.3.9, nous énonçons un certain nombre de lemmes qui nous serviront également dans l'étude de la marche sur le tore.

Premièrement, nous étendons la loi des grands nombres pour les martingales de Breiman (énoncée dans [Bre60]) pour des fonctions mesurables $f \in \mathcal{E}_u^p$ pour un certain $p > 1$: ce sera la proposition 2.3.5. Pour cela, nous aurons besoin du

Lemme 2.3.2. *Soit u une fonction de dérive, $x \in \mathbf{X}$, et $\alpha \in \mathbb{R}_+$, alors,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(u-Pu)(x)}{(k+1)^\alpha} \leqslant u(x)$$

Démonstration. Le calcul est direct en utilisant que pour tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $P^n u(x)$ est positif :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(u-Pu)(x)}{(k+1)^\alpha} &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} P^k u(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^\alpha} P^{k+1} u(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+1)^\alpha} - \frac{1}{k^\alpha}\right) P^k u(x) + u(x) - \frac{1}{(n+1)^\alpha} P^{n+1} u(x) \\ &\leqslant u(x)\end{aligned}$$

□

Avant de démontrer la loi des grands nombres, le théorème central limite et la loi du logarithme itéré, nous prouvons que le « terme de bord » $f(X_n)/n$ ne joue pas de rôle : c'est-à-dire qu'il revient au même d'étudier

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_n) - Pf(X_n) \text{ et } \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_{n+1}) - Pf(X_n).$$

Ainsi, de la loi des grands nombres pour les martingales, nous pourrons déduire la loi des grands nombres pour des fonctions s'écrivant $f - Pf$. De même, avec la normalisation convenable, nous pourrons obtenir le théorème central limite et la loi du logarithme itéré pour des fonctions s'écrivant $f-Pf$ à partir de ces résultats pour des martingales.

Lemme 2.3.3. *Soit u une fonction de dérive et $p > 1$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_u^p$, tout $x \in \mathbf{X}$ tel que $u(x)$ est fini et tout $\varepsilon \in]0, p[$,*

$$\frac{f(X_n)}{n^{1/(p-\varepsilon)}} \to 0 \ \mathbb{P}_x - p.s. \text{ et dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)$$

Remarque 2.3.4. Nous utiliserons ce lemme avec $p > 1$ pour pouvoir prendre $p-\varepsilon = 1$ et $p > 2$ pour prendre $p - \varepsilon = 2$.

Démonstration. Avec les notations de l'énoncé, calculons pour un $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}_x|f(X_n)|^p \leqslant \|f\|_{\mathcal{E}_u^p}\mathbb{E}_x u(X_n) - Pu(X_n) + b = \|f\|_{\mathcal{E}_u^p} P^n(u - Pu + b)$$

Et donc, en supposant sans perte de généralité que $\|f\|_{\mathcal{E}_u^p} = 1$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \frac{\mathbb{E}_x|f(X_k)|^p}{(k+1)^{p/(p-\varepsilon)}} &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{P^k(u-Pu)}{(k+1)^{1+\varepsilon/(p-\varepsilon)}} + b\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)^{1+\varepsilon/(p-\varepsilon)}} \\ &\leqslant u(x) + b\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{1+\varepsilon/(p-\varepsilon)}}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 2.3.2 pour contrôler la première somme.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{X}$ tel que $u(x)$ est fini,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x\left(\frac{|f(X_k)|}{(k+1)^{1/(p-\varepsilon)}}\right)^p$$

est finie ce qui termine la preuve du lemme. □

Proposition 2.3.5. *Soit u une fonction de dérive et $p \in]1, +\infty[$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_u^p$ et tout $x \in X$ tel que $u(x)$ est fini,*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_{k+1}) - Pf(X_k) \to 0 \ \ \mathbb{P}_x - p.s. \text{ et dans } \mathrm{L}^p(\mathbb{P}_x)$$

Démonstration. Pour un entier n, nous notons $M_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(X_{k+1}) - Pf(X_k)$.

Alors, M_n est une martingale d'espérance nulle et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x|M_{n+1} - M_n|^p = \mathbb{E}_x|f(X_{n+1}) - Pf(X_n)|^p &\leqslant 2^{p-1}P^{n+1}(|f|^p)(x) \\ &\leqslant 2^{p-1}\|f\|_{\mathcal{E}_u^p} P^{n+1}(u - Pu + b)\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}\mathbb{E}_x|M_{n+1} - M_n|^p &\leqslant 2^{p-1}\|f\|_{\mathcal{E}_u^p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{P^{n+1}(u - Pu + b)}{n^p} \\ &\leqslant 2^{p-1}\|f\|_{\mathcal{E}_u^p}\left(u(x) + b\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{n^p}\right)\end{aligned}$$

Et donc, en utilisant la loi des grands nombres pour les martingales (voir le théorème 2.18 de [HH80]), nous obtenons que $\frac{1}{n}M_n \to 0$ $\mathbb{P}_x-$p.s. et dans $\mathrm{L}^p(\mathbb{P}_x)$. □

Lemme 2.3.6. *Soit u une fonction de dérive exponentielle (voir le lemme 2.2.8) et $p \in]1, +\infty[$.*

Soit $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ une fonction décroissante qui converge vers 0 en $+\infty$.

Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_u^p$ et tout point x de $\mathbf{X}$ tel que $u(x)$ est fini,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(k)f(X_k) \to 0 \ \ \mathbb{P}_x - p.s. \text{ et dans } \mathrm{L}^p(\mathbb{P}_x)$$

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\|f\|_{\mathcal{E}_u^p} = 1$.

Nous notons $a \in [0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $Pu \leqslant au + b$.

Premièrement, nous remarquons que pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$|f(x)|^p \leqslant u(x) - Pu(x) + b \leqslant (1 + b)u(x)$$

La convergence dans L^p est alors facile à voir en remarquant que

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_x\left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(k)f(X_k)\right|^p\right)^{1/p} &\leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(k)\left(\mathbb{E}_x|f(X_k)|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \frac{(1+b)^{1/p}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(k)\left(P^k u(x)\right)^{1/p} \\ &\leqslant \frac{(1+b)^{1/p}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(k)(u(x) + b/(1-a))^{1/p}\end{aligned}$$

et puis en utilisant le lemme de Cesaro.

Pour étudier la convergence presque sûre, dans un premier temps, nous allons montrer que pour tout x tel que $u(x)$ est fini,

$$\limsup_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(X_k)| \leqslant \frac{b(1+b)^{1/p}}{1-a^{1/p}} \quad \mathbb{P}_x - \text{p.s.} \tag{2.3.1}$$

En effet, pour $r \in]0,1]$, nous notons $u_r(x) = u(x)^r$. Et alors, par concavité de la fonction $(t \mapsto t^r)$,

$$Pu_r \leqslant (Pu)^r \leqslant (au+b)^r \leqslant a^r u_r + b$$

ce qui veut dire que $u_r \leqslant \frac{1}{1-a^r}(u_r - Pu_r + b)$. Et donc, avec $r = 1/p$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(X_k)| &\leqslant \frac{(1+b)^{1/p}}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_{1/p}(X_k) \\
&\leqslant \frac{(1+b)^{1/p}}{1-a^{1/p}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_{1/p}(X_k) - Pu_{1/p}(X_k) + b \\
&\leqslant \frac{(1+b)^{1/p}}{1-a^{1/p}}\left(\frac{1}{n}u(x)+b\right) + \frac{(1+b)^{1/p}}{1-a^{1/p}}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_{1/p}(X_{k+1}) - Pu_{1/p}(X_k)
\end{aligned}$$

De plus, par définition, $u_{1/p}^p = u \in \mathcal{E}_u^1$ et donc, d'après la proposition 2.3.5,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}u_{1/p}(X_{k+1}) - Pu_{1/p}(X_k) \to 0 \; \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

et cela démontre l'inégalité (2.3.1). Ainsi, presque sûrement, il existe un n_0 tel que pour $n \geqslant n_0$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(X_k)| \leqslant 2\frac{b(1+b)^{1/p}}{1-a^{1/p}}$$

Et donc, pour n tel que $\sqrt{n} \geqslant n_0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\psi(k)|f(X_k)| &\leqslant \frac{\psi(0)}{n}\sum_{k=0}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1}|f(X_k)| + \frac{\psi(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)}{n}\sum_{k=\lfloor\sqrt{n}\rfloor}^{n-1}|f(X_k)| \\
&\leqslant 2\frac{b(1+b)^{1/p}}{1-a^{1/p}}\left(\frac{\psi(0)}{\sqrt{n}} + \psi(\sqrt{n})\right)
\end{aligned}$$

Et comme ψ converge vers 0, cela termine la preuve du lemme. □

En utilisant les mêmes idées que dans la preuve de la proposition 2.3.5, nous pouvons démontrer le

Lemme 2.3.7. *Soit (u, C) une fonction de dérive telle que pour un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $Pu \leqslant u - \delta + b\mathbb{1}_C$ et soit $p > 2$.*

Alors, pour toute fonction $g \in \mathcal{E}_u^p$, tout point $x \in \mathbf{X}$ tel que $u(x)$ est fini et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, nous avons que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_x \left((g(X_{k+1}) - Pg(X_k))^2 \mathbb{1}_{|g(X_{k+1}) - Pg(X_k)| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}} \right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \mathbb{E}_x \left(|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)| \, \mathbb{1}_{|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}} \right) \text{ est finie}$$

De plus, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \mathbb{E}_x \left((g(X_{n+1}) - Pg(X_n))^4 \mathbb{1}_{|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)| \leqslant \delta\sqrt{n}} \right)$$

est finie.

Remarque 2.3.8. Si u est une fonction de dérive exponentielle (voir le lemme 2.2.8), alors, en notant $a \in [0, 1[$ et $b \in \mathbb{R}_+$ tels que $Pu \leqslant au + b\mathbb{1}_C$, on a que pour x tel que $u(x)$ est fini,

$$Pu(x) \leqslant au(x) + b\mathbb{1}_C(x) \leqslant u(x) - (1 - a) + b\mathbb{1}_C$$

Où nous avons utilisé que pour tout $x \in \mathbf{X}$, $u(x) \geqslant 1$. Et la fonction u vérifie l'hypothèse du lemme.

Démonstration. En utilisant l'inégalité de Markov nous avons que

$$\mathbb{E}_x \left(h(X_{k+1}, X_k)^2 \mathbb{1}_{|h(X_{k+1}, X_k)| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}} \right) \leqslant \frac{P^k \left(\mathbb{E} \left(g(X_1) - Pg(X_0) \right)^p \right)(x)}{\varepsilon^{p-2} n^{(p-2)/2}}$$

où nous avons noté $h(x, y) = g(x) - Pg(y)$ pour $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $u(x), u(y) < +\infty$.

Mais, $\mathbb{E}_x \left[((g(X_1) - Pg(X_0))^p \right] \in \mathcal{E}_u^1$, puisque nous avons pris g dans $\mathcal{E}_u^p$.

Et donc, pour une certaine constante C, nous avons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}_x \left(h(X_{k+1}, X_k)^2 \mathbb{1}_{|h(X_{k+1}, X_k)| \geqslant \varepsilon\sqrt{n}} \right) &\leqslant \frac{C}{n^{1+(p-2)/2}\varepsilon^{p-2}} \sum_{k=0}^{n-1} P^k (u - Pu + b)(x) \\
&\leqslant \frac{C}{n^{1+(p-2)/2}\varepsilon^{p-2}} u(x) + \frac{bC}{n^{(p-2)/2}\varepsilon^{p-2}}
\end{aligned}$$

Et le terme de droite converge bien vers 0 quand n tends vers l'infini puisque nous avons pris un point x où u prends une valeur finie.

Remarquons maintenant que

$$\mathbb{E}_x\left(|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)|\,\mathbb{1}_{|g(X_{n+1})-Pg(X_n)|\geqslant\varepsilon\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}_x\,|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)|^p}{(\varepsilon\sqrt{n})^{p-1}}$$

et, en notant $p' = \min(p,4)$, nous avons que

$$\mathbb{E}_x\left((g(X_{n+1}) - Pg(X_n))^4\mathbb{1}_{|g(X_{n+1})-Pg(X_n)|\leqslant\delta\sqrt{n}}\right) \leqslant \frac{\mathbb{E}_x\,|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)|^{p'}}{(\delta\sqrt{n})^{4-p'}}$$

Ainsi, chacune des deux sommes que nous devons étudier est dominée par une constante multipliée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{p'/2}}\mathbb{E}_x\left(|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)|^{p'}\right)$$

De plus, comme $0 < \delta \leqslant u(x) - Pu(x) + b\mathbb{1}_C$, nous avons que si $g \in \mathcal{E}_u^p$, alors $g \in \mathcal{E}_u^{p'}$. Et, une fois encore, nous avons alors que pour une certaine constante C,

$$\mathbb{E}_x\left(|g(X_{n+1}) - Pg(X_n)|^{p'}\right) \leqslant C2^p\|g\|_{\mathcal{E}_u^p}P^n(u - Pu + b)(x)$$

Et nous pouvons conclure grâce au lemme 2.3.2. □

L'importance du lemme 2.3.7 vient de ce qu'il est la première étape pour obtenir le théorème central limite et la loi du logarithme itéré comme nous allons le voir dans le

Corollaire 2.3.9. *Soit u une fonction de dérive telle que $Pu \leqslant u - \delta + b\mathbb{1}_C$ pour un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $p > 2$.*

Soit $g \in \mathcal{E}_u^p$ et $x \in \mathbf{X}$ un point tel que $u(x)$ est fini.

Si

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P(g^2)(X_k) - (Pg(X_k))^2$$

converge dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)$ et presque-sûrement vers une constante $\sigma^2(g,x)$, alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}g(X_{k+1}) - Pg(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\sigma^2(g,x))$$

Où nous avons noté $\mathcal{N}(0,0)$ la masse de Dirac en 0.

De plus, si $\sigma^2(g,x) \neq 0$ alors,

$$\limsup \frac{\sum_{k=0}^{n-1}g(X_{k+1}) - Pg(X_k)}{\sqrt{2n\sigma^2(g,x)\ln\ln(n)}} = 1 \text{ } p.s.$$

et

$$\liminf \frac{\sum_{k=0}^{n-1}g(X_{k+1}) - Pg(X_k)}{\sqrt{2n\sigma^2(g,x)\ln\ln(n)}} = -1 \text{ } p.s.$$

Démonstration. Le théorème central limite vient de celui de Brown (cf [Bro71]) puisque la « condition de Lindeberg » est satisfaite quand la fonction g est dominée par une fonction de dérive comme nous l'avons vu dans le lemme 2.3.7. C'est pour cela que nous avons nommé ainsi les « fonctions de dérive ».

La loi du logarithme itéré est donnée par le corollaire 4.2 et le théorème 4.8 de Hall et Heyde dans [HH80] puisque l'hypothèse du corollaire est vérifiée d'après le lemme 2.3.7. □

Ce corollaire montre que le TCL et la loi du logarithme itéré se déduisent de la loi des grands nombres pour des martingales dominées par des fonctions de dérive (et donc aussi, pour des fonctions s'écrivant $g - Pg$ d'après la remarque que nous avons faite après le lemme 2.3.3).

Chapitre 3

À propos de la nullité de la variance

Dans ce chapitre, nous étudions des conditions garantissant que la variance apparaissant dans le théorème central limite et la loi du logarithme itéré ne peut pas s'annuler.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact agissant mesurablement sur un espace borélien standard $(\mathbf{X}, \nu)$ en préservant la mesure de probabilité ν.

Nous supposerons toujours ici que l'action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$ est $\nu-$ergodique c'est-à-dire que toutes les fonctions mesurables $\mathbf{G}-$invariantes sont constantes $\nu-$pp.

Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$ et P l'opérateur de Markov associé.

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$, on a, d'après l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned}\|Pf\|_2^2 = \int_{\mathbf{X}} \left| \int_{\mathbf{G}} f(gx) \mathrm{d}\rho(g) \right|^2 \mathrm{d}\nu(x) &\leqslant \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{X}} |f(gx)|^2 \mathrm{d}\nu(x) \mathrm{d}\rho(g) \\ &\leqslant \int_{\mathbf{X}} |f(x)|^2 \mathrm{d}\nu(x) = \|f\|_2^2\end{aligned}$$

et donc, l'opérateur P est continu sur $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ et $\|P\|_2 \leqslant 1$. Il est clair que $\|P\|_2 = 1$ car $P1 = 1$.

Dans notre étude du théorème central limite, la variance pour une fonction f sera toujours donnée par

$$\sigma^2(f) = \|g\|_2^2 - \|Pg\|_2^2$$

où $g \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ sera une fonction que l'on aura construite telle que $f - \int f \mathrm{d}\nu = g - Pg$ (dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$). Il est donc important de savoir si il existe des fonctions $g \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ non constantes telles que $\|Pg\|_2 = \|g\|_2$.

Cette question a été traitée par exemple par Furman et Shalom dans [FS99] où ils montrent que si la mesure ρ est apériodique, c'est-à-dire si son support n'est pas inclus dans une classe à gauche d'un sous-groupe propre de $\mathbf{G}$ alors, il n'existe pas de fonction non constante f sur $\mathbf{X}$ telle que $\|Pf\|_2 = \|f\|_2$.

Nous montrons ici que l'existence de telles fonctions est en fait équivalente à l'existence d'un sous groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ pour lequel l'action sur $\mathbf{X}$ n'est pas $\nu-$ergodique et d'un élément $g \in \mathbf{G}$ tel que $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbf{H}g$. C'est l'objet de la proposition 3.0.5.

Si ρ est une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$, nous notons $\widetilde{\rho}$ la mesure réfléchie. C'est la mesure définie pour toute partie borélienne A de $\mathbf{G}$ par

$$\widetilde{\rho}(A) = \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_A(g^{-1}) \mathrm{d}\rho(g)$$

Remarque 3.0.1. Remarquons que comme la mesure ν est $\mathbf{G}-$invariante, nous pouvons calculer pour toutes fonctions $f_1, f_2 \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} f_2 P_\rho f_1 \mathrm{d}\nu &= \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{X}} f_1(gx) f_2(x) \mathrm{d}\nu(x) \mathrm{d}\rho(g) = \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{X}} f_1(x) f_2(g^{-1}x) \mathrm{d}\nu(x) \\ &= \int_{\mathbf{X}} f_1 P_{\widetilde{\rho}} f_2 \mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

L'opérateur $P_{\widetilde{\rho}}$ est donc l'adjoint de P_ρ dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$.

Remarque 3.0.2. Dans notre définition de l'opérateur P_ρ, nous avons fait agir à gauche l'élément g. Ainsi, si ρ_1, ρ_2 sont des mesures boréliennes de probabilité sur $\mathbf{G}$, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$, et tout $x \in \mathbf{X}$, nous avons que

$$P_{\rho_1} P_{\rho_2} f(x) = \int_{\mathbf{G}} P_{\rho_2} f(gx) \mathrm{d}\rho_1(g) = \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbf{G}} f(g_2 g_1 x) \mathrm{d}\rho_1(g_1) \mathrm{d}\rho_2(g_2) = P_{\rho_2 * \rho_1} f(x)$$

Et $P_{\rho_1} P_{\rho_2}$ est donc l'opérateur associé à la mesure $\rho_2 * \rho_1$. Cette inversion n'a aucune conséquence dans le reste de cette thèse (puisque nous ne convolerons pas des mesures différentes) mais il faut faire attention dans ce paragraphe à ce que la mesure associée à l'opérateur P^*P est la mesure $\rho * \tilde{\rho}$.

Remarquons d'abord que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$,

$$\|f\|_2^2 - \|Pf\|_2^2 = \int_{\mathbf{X}} f^2(y) - (Pf)^2(y) \mathrm{d}\nu(y) = \int_{\mathbf{X}} f(y)(I_d - P^*P) f(y) \mathrm{d}\nu(y)$$

où P^* est l'opérateur adjoint de P dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$.

Par ailleurs, nous avons vu que $\|f\|^2 - \|Pf\|^2 \geqslant 0$.

Lemme 3.0.3. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe,* $S \subset \mathbf{G}$ *et* $S^{-1} = \{g^{-1} | g \in S\}$.

Alors, le sous groupe de $\mathbf{G}$ *engendré par* SS^{-1} *est le plus petit sous-groupe* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$ *tel qu'il existe* $g \in \mathbf{G}$ *avec* $S \subset \mathbf{H}g$.

Démonstration. Premièrement, soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe de $\mathbf{G}$ et $g \in \mathbf{G}$. Si $S \subset \mathbf{H}g$ alors $SS^{-1} \subset \mathbf{H}gg^{-1}\mathbf{H} = \mathbf{H}$.

Réciproquement, soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant SS^{-1} et soit $g \in S$.

Alors, pour tout $h \in S$, on a $h = hg^{-1}g$ mais $hg^{-1} \in \mathbf{H}$ et donc $h \in \mathbf{H}g$. Cela montre donc que $S \subset \mathbf{H}g$.

Ce que l'on a donc montré c'est que pour tout sous-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$, on a l'équivalence entre « $SS^{-1} \subset \mathbf{H}$ » et « il existe $g \in \mathbf{G}$ tel que $S \subset \mathbf{H}g$ ». Et cela prouve le lemme car le sous-groupe de $\mathbf{G}$ engendré par SS^{-1} est par définition le plus petit sous-groupe de $\mathbf{G}$ contenant SS^{-1}. □

Lemme 3.0.4. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact dénombrable à l'infini agissant de manière mesurable sur un espace borélien standard $\mathbf{X}$ en préservant la mesure de probabilité ν.*

Alors, pour toute fonction mesurable f sur $\mathbf{X}$,

$$\mathbf{G}_f := \{g \in \mathbf{G} \mid f(gx) = f(x)\ \nu - p.p\}$$

est un sous groupe fermé de $\mathbf{G}$.

Démonstration. Il est clair que $\mathbf{G}_f$ est un sous-groupe de $\mathbf{G}$.

Notons maintenant, pour $i \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$A_{i,\varepsilon} = \{x \in \mathbf{X} \mid f(x) \in [i\varepsilon, (i+1)\varepsilon[\}$$

Alors, pour tout $g \in \mathbf{G}$,

$$(g \in \mathbf{G}_f) \Leftrightarrow \left(\forall i \in \mathbb{Z}\, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*\ \nu(g^{-1}A_{i,\varepsilon}\Delta A_{i,\varepsilon}) = 0\right)$$

En effet, pour tout $g \in \mathbf{G}$,

$$\{x \in \mathbf{X} \mid f(gx) \neq f(x)\} = \cup_{i \in \mathbb{Z}} \cup_{n \in \mathbb{N}} A_{i,1/n}\Delta g^{-1}A_{i,1/n}$$

Soit $(g_n) \in \mathbf{G}_f^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un élément g de $\mathbf{G}$. Alors, pour tout ensemble borélien A de $\mathbf{X}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \nu(g_n^{-1}A\Delta g^{-1}A) = 0$$

(voir la première remarque du paragraphe 1.6 dans [Aar97]).

De plus, nous avons également que

$$g^{-1}A\Delta A \subset g_n^{-1}A\Delta g^{-1}A \cup g_n^{-1}A\Delta A$$

et donc, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\nu(g^{-1}A_{i,\varepsilon}\Delta A_{i,\varepsilon}) = \lim_{n \to +\infty} \nu(g_n^{-1}A_{i,\varepsilon}\Delta A_{i,\varepsilon}) = 0$$

et $g \in \mathbf{G}_f$, ce qu'il fallait démontrer. □

Proposition 3.0.5. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe localement compact agissant mesurablement et ergodiquement sur un espace borélien standard* $(\mathbf{X}, \nu)$ *en préservant la mesure de probabilité* ν*.*

Alors, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$*, les trois assertions suivantes sont équivalentes*

- $\|Pf\|_2 = \|f\|_2$
- *Pour* $\nu-$*presque tout* $x \in \mathbf{X}$ *et* $\rho * \tilde{\rho}-$*presque tout* $g \in \mathbf{G}$*,* $f(gx) = f(x)$*.*
- *Il existe un sous groupe* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$ *et un élément* $g \in \mathbf{G}$ *tels que* f *est* $\mathbf{H}-$*invariante presque partout et* $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbf{H}g$*.*

Remarque 3.0.6. Il ne peut exister une fonction $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ non constante et telle que $\|Pf\|_2 = \|f\|_2$ que si $\operatorname{supp} \rho$ est inclut dans une classe à droite d'un sous groupe de $\mathbf{G}$ dont l'action sur $\mathbf{X}$ n'est pas $\nu-$ergodique.

Remarque 3.0.7. Si $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ agissant sur le tore $\mathbf{X} = \mathbb{T}^d/\mathbb{Z}^d$ muni de la mesure de Lebesgue ν.

Si $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbf{H}g$ et $f \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ est $\mathbf{H}$-invariante alors, pour $\nu-$presque tout point x du tore, $f(x) - Pf(x) = f(x) - f(gx)$ et donc, si $f - Pf$ est hölderienne et g est hyperbolique, alors le théorème de Livsic sur les difféomorphismes hyperboliques des variétés compactes montre que la fonction f elle-même est hölderienne.

Démonstration. Premièrement, remarquons que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{X}} \int_{\mathbf{G}} |f(gx) - f(x)|^2 \mathrm{d}(\rho * \tilde{\rho})(g) \mathrm{d}\nu(x) &= \int_{\mathbf{X}} 2|f(x)|^2 - 2\Re(\overline{f(x)} P^* P f(x)) \mathrm{d}\nu(x) \\ &= 2\|f\|_2^2 - 2\Re\left(\int \overline{f} P^* P f \mathrm{d}\nu\right) \\ &= 2\|f\|_2^2 - 2\|Pf\|_2^2\end{aligned}$$

et donc les deux premiers points sont équivalents.

Le second point et le lemme 3.0.4 entraînent que f est invariante presque partout par le sous-groupe engendré par $(\operatorname{supp} \rho)(\operatorname{supp} \rho)^{-1}$. Or d'après le lemme 3.0.3, ce sous-groupe est le plus petit sous-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ tel qu'il existe $g \in \mathbf{H}$ avec $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbf{H}g$. Et donc le second point entraîne le troisième.

Enfin, si il existe un élément g de $\mathbf{G}$ et un sous-groupe $\mathbf{H}$ tels que f est $\mathbf{H}-$invariante presque partout et $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbf{H}g$, pour $\nu-$presque tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $\gamma \in \operatorname{supp} \rho$, $f(\gamma x) = f(gx)$ et donc,

$$Pf(x) = \int_{\mathbf{G}} f(\gamma x) \mathrm{d}\rho(\gamma) = f(gx)$$

Ainsi, en utilisant la $\mathbf{G}-$invariance de la mesure ν, on a que

$$\int_{\mathbf{X}} |Pf(x)|^2 \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbf{X}} |f(gx)|^2 \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbf{X}} |f(x)|^2 \mathrm{d}\nu(x)$$

et le troisième point entraîne donc le premier. □

Corollaire 3.0.8. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe localement compact agissant mesurablement et ergodiquement sur un espace borélien standard* $(\mathbf{X}, \nu)$ *en préservant la mesure de probabilité* ν. *Soit* ρ *une mesure borélienne de probabilité sur* $\mathbf{G}$.

Soit $g \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ *telle que* $\nu(\{x \in \mathbf{X} | \sup_n P^n g^2(x) < +\infty\}) = 1$ *et notons* $f = g - Pg$. *Supposons que* $\|g\|_2 = \|Pg\|_2$ *alors pour* $\nu-$*presque tout* $x \in \mathbf{X}$, *la suite* $(\sum_{k=0}^{n-1} f(g_k \dots g_1 x))$ *est bornée dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{P}_x)$.

Si de plus g *est dans* $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{X})$ *alors pour* $\nu-$*presque tout* $x \in \mathbf{X}$, *la suite* $(\sum_{k=0}^{n-1} f(g_k \dots g_1 x))$ *est bornée dans* $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{P}_x)$.

Démonstration. D'après la proposition précédente, si $\|g\| = \|Pg\|$, alors il existe un élément $\gamma \in \mathbf{G}$ et un sous-groupe $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ tel que $\operatorname{supp} \rho \subset \mathbf{H}\gamma$ et g est $\mathbf{H}-$invariante.

Et donc, pour $\nu-$presque tout $x \in \mathbf{X}$ et $\rho-$presque tout $g_1 \in \mathbf{G}$, $g(g_1 x) = g(\gamma x)$. En particulier, $Pg(x) = g(\gamma x)$ et donc, $f(x) = g(x) - g(\gamma x)$.

Ainsi, pour $\nu-$presque tout $x \in \mathbf{X}$ et $\rho^{\otimes n}-$presque tout $(g_i) \in \mathbf{G}^n$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} f(g_k \dots g_1 x) &= \sum_{k=0}^{n-1} g(g_k \dots g_1 x) - g(\gamma g_k \dots g_1 x) \\
&= g(x) - g(g_n \dots g_1 x) + \sum_{k=0}^{n-1} g(g_{k+1} \dots g_1 x) - g(\gamma g_k \dots g_1 x) \\
&= g(x) - g(g_n \dots g_1 x)
\end{aligned}$$

Et cela montre le corollaire dans le cas où g est bornée. Par ailleurs, en utilisant la formule précédente, on trouve que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{G}^{\mathbb{N}}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(g_k \dots g_1 x) \right|^2 \mathrm{d}\rho^{\otimes \mathbb{N}}((g_i)) &= g(x)^2 + P^n(g^2)(x) - 2g(x)P^n g(x) \\
&\leqslant g(x)^2 + P^n(g^2)(x) + 2|g(x)|\sqrt{P^n(g^2)(x)} \\
&\leqslant 4 \sup_n P^n(g^2)(x)
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Jensen pour dire que $|P^n g(x)| \leqslant \sqrt{P^n g^2(x)}$. $\square$

L'exemple suivant est une illustration dans un cadre explicite du corollaire précédent.

Exemple 3.0.9. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors, le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par A et B est fortement irréductible et proximal et la mesure de Haar ν sur le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est ergodique.

Soit $\rho = \frac{1}{2}\delta_A + \frac{1}{2}\delta_{BA}$.

Guivarc'h a montré dans [Gui06] que P a un trou spectral dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{T}^2, \nu)$.

Soit d la distance induite dans le tore $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ par la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^2$. Et soit g la fonction définie pour $x \in \mathbb{T}^2$, par $g(x) = d(x, 0)$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{T}^2$,

$$Pg(x) = \frac{1}{2}d(Ax, 0) + \frac{1}{2}d(BAx, 0) = d(Ax, 0) = g(Ax)$$

et, d'après la formule de changement de variable, comme $\det A = 1$, on a que

$$\int_{\mathbf{X}} |Pg(x)|^2 \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbf{X}} |g(Ax)|^2 \mathrm{d}\nu(x) = \int_{\mathbf{X}} |g(x)|^2 \mathrm{d}\nu(x)$$

De plus, si on note $f = g - Pg$, alors pour tout $x \in \mathbf{X}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(g_1, \dots g_n) \in \{A, BA\}^n$, nous avons que

$$g(g_{n+1} \dots g_1 x) = g(Ag_n \dots g_1 x)$$

et donc,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} f(g_k \dots g_1 x) &= g(x) - g(g_n \dots g_1 x) + \sum_{k=0}^{n-1} g(g_{k+1} \dots g_1 x) - g(Ag_k \dots g_1 x) \\ &= g(x) - g(g_n \dots g_1 x)\end{aligned}$$

et on trouve donc que pour tout $x \in \mathbf{X}$, la suite $(\sum_{k=0}^{n-1} f(g_k \dots g_1 x))$ est bornée dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{P}_x)$.

Chapitre 4

Application à la marche sur le tore

Résumé

Ce chapitre est consacré à l'étude de la marche aléatoire sur le tore définie par une mesure de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$. La loi des grands nombres est connue grâce à un résultat de Bourgain, Furman, Lindenstrauss et Mozes dans [BFLM11] qui permet d'avoir une vitesse de convergence dépendant des propriétés diophantiennes du point de départ et nous utiliserons cette vitesse pour démontrer le théorème central limite et la loi du logarithme itéré.

Sommaire

Soit $\mathbf{H}$ un sous-groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$. Nous dirons que l'action de $\mathbf{H}$ sur $\mathbb{R}^d$ est *fortement irréductible* si $\mathbf{H}$ ne stabilise pas d'union finie de sous-espaces-vectoriels propres de $\mathbb{R}^d$ et qu'elle est *proximale* si $\mathbf{H}$ contient un élément ayant une valeur propre strictement dominante dont l'espace propre associé est une droite.

Si on suppose en plus que $\mathbf{H}$ est un sous-groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, alors son action passe au quotient en une action sur le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$. De plus, si $\mathbf{H}$ agit de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$ alors tout $a \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ a une $\mathbf{H}-$orbite infinie et donc, d'après le critère énoncé dans la proposition 1.5 du livre [BM00] de Bekka et Mayer, l'action de $\mathbf{H}$ sur $\mathbb{T}^d$ est ergodique.

Soit désormais ρ une mesure de probabilité sur Γ. Nous définissons une marche aléatoire sur $\mathbf{X} := \mathbb{T}^d$ en notant, pour $x \in \mathbf{X}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} X_0 & = & x \\ X_{n+1} & = & g_{n+1}X_n \end{array} \right.$$

où $(g_n) \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires iid de lois ρ.

On munit le tore de la métrique quotient définie par la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^d$. C'est-à-dire que si $x, y \in \mathbb{T}^d$,

$$d(x,y) = \inf_{p \in \mathbb{Z}^d} \|\overline{x} - \overline{y} - p\|$$

Où $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) est un représentant dans $\mathbb{R}^d$ de x (resp. y).

Dans ce contexte, Bourgain, Furman, Lindenstrauss et Mozes ont démontré le

Théorème 4.1 ([BFLM11]). *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\Gamma := \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ dont le support engendre un groupe agissant de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$ et ayant un moment exponentiel*[1].

Notons

$$\lambda_1 = \int_\Gamma \int_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \ln \|gx\| \mathrm{d}\nu(x) \mathrm{d}\rho(g) > 0$$

où ν est l'unique[2] *mesure de probabilité $\rho-$stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.*

Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{T}^d$, tout $a \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tout $t \in]0, 1/2]$ et tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant -C \ln t$, si,

$$|\widehat{\rho^{*n} * \delta_x}(a)| > 2t\|a\|$$

alors, x admet une approximation rationnelle $p/q \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ vérifiant

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-(\lambda_1 - \varepsilon)n} \text{ et } |q| \leqslant t^{-C}$$

En particulier, cela montre, que si x est irrationnel, alors pour tout $a \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ et tout $t \in]0, 1/2]$, il n'y a qu'un nombre fini de n tels que $|\widehat{\rho^{*n} * \delta_x}(a)| > 2t\|a\|$ ce qui montre que pour tout point irrationnel x de $\mathbb{T}^d$ et tout $a \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n \to +\infty} \widehat{\rho^{*n} * \delta_x}(a) = 0$$

Et donc, en utilisant le critère d'équidistribution de Weyl, cela montre que pour toute fonction continue f sur $\mathbb{T}^d$ et tout point irrationnel $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\lim_{n \to +\infty} P^n f(x) = \int f \mathrm{d}\nu \tag{4.0.1}$$

1. Il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\int_{\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g) \text{ est finie}$$

2. Le fait que λ_1 existe et est strictement positif et l'unicité de la mesure stationnaire viennent d'un résultat de [GR85].

où ν est la mesure de Haar sur le tore et la vitesse de convergence dépend de propriétés diophantiennes de x (cf. le corollaire C de [BFLM11]).

Dans ce chapitre, nous voulons dans un premier temps expliciter la vitesse de convergence dans (4.0.1) en fonctions des propriétés diophantiennes de x et puis utiliser cette vitesse pour démontrer la loi des grands nombres, le théorème central limite et la loi du log-itéré pour un point de départ ayant de bonnes propriétés diophantiennes.

Dans la première section, nous reformulerons le théorème 4.1 en une version qui sera plus facile à manipuler pour nous. Le prix à payer est que l'on ne pourra plus traiter que des fonction hölderiennes sur le tore. Ce sera la

Proposition (4.1.6). *Soit ρ une mesure de probabilité sur Γ dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal et ayant un moment exponentiel.*

Alors, pour tout $\gamma, \delta \in]0,1]$, il existe des constantes $C, C_0, C_1 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour toute fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ avec $\varphi(t) \geqslant 1 + t^2$, tout $x \in \mathbb{T}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \leqslant C\psi(n) h_\varphi(x)^\delta$$

où h_φ est la fonction définie pour $x \in \mathbb{T}^d$ par

$$h_\varphi(x) = \sup_{p/q \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d} \frac{1}{\varphi(q) d(x, p/q)}$$

Finalement, la fonction ψ est définie par

$$\psi(t) = \left(\varphi^{-1}(e^{C_1 t})\right)^{-C_0}$$

et $\mathcal{W}_\gamma$ est la distance de Kantorovich définie entre deux mesure de probabilité ϑ_1, ϑ_2 sur le tore par

$$\mathcal{W}_\gamma(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{T}^d) \\ \|f\|_\gamma \leqslant 1}} \left| \int_{\mathbf{X}} f \mathrm{d}\vartheta_1 - \int_{\mathbf{X}} f \mathrm{d}\vartheta_2 \right|$$

Puis, nous montrerons qu'il existe une fonction u_φ qui domine la fonction h_φ et telle que $Pu_\varphi \leqslant au_\varphi + b$ pour un certain $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$. Cela veut dire que, en moyenne, $u_\varphi(gx)$ est bien plus petit que $u_\varphi(x)$ et cela nous permettra de démontrer, grâce aux résultats du paragraphe 2.3, le

Théorème (4.3.4). *Soit ρ une mesure de probabilité sur Γ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un groupe agissant de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout $\gamma \in]0,1]$ *il existe* $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que pour tout* $B \in \mathbb{R}_+^*$ *et tout* $\beta \in]0, \beta_0[$ *nous avons que pour tout point irrationnel* $x \in \mathbb{T}^d$ *tel que l'inégalité*

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-Bq^\beta}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $p/q \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$*, on a que pour toute fonction* $\gamma-$*hölderienne* f *sur le tore, en notant* $\sigma^2(f) = \int g^2 - (Pg)^2 \mathrm{d}\nu$ *où* $g \in \mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ *est telle que* $f - \int f \mathrm{d}\nu = g - Pg$ [3]*, on a*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma^2(f)\right)$$

(Si $\sigma^2 = 0$*, la loi* $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ *est une masse de Dirac en* μ*).*

De plus, si $\sigma^2(f) \neq 0$ *alors*

$$\liminf \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu}{\sqrt{2n\sigma^2(f) \ln \ln n}} = -1 \ \textit{et} \ \limsup \frac{\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu}{\sqrt{2n\sigma^2(f) \ln \ln n}} = 1$$

et, si $\sigma^2(f) = 0$ *(voir le paragraphe 3 pour une condition garantissant que cela ne peut pas être le cas si* f *n'est pas constante), alors pour* $\nu-$*presque tout* $x \in \mathbf{X}$*, la suite* $(\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu)_n$ *est bornée dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{P}_x)$*.*

4.1 Le théorème de Bourgain, Furmann, Lindenstrauss et Mozes pour les fonctions hölderiennes

Nous commençons par un rappel sur la distance de Kantorovich entre des mesures de probabilité et puis nous éonçons le théorème de Bourgain, Furman, Lindenstrauss et Mozes en utilisant cette distance.

4.1.1 Distance de Kantorovich sur le tore

Nous notons $\mathbf{X}$ le tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ muni de la métrique quotient définie par une norme sur $\mathbb{R}^d$

Si ϑ_1 et ϑ_2 sont deux mesure de probabilité sur $\mathbf{X}$, on peut utiliser la distance en variation totale :

$$d_{\mathrm{var}}(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X}) \\ \|f\|_\infty \leqslant 1}} \left| \int f \mathrm{d}\vartheta_1 - \int f \mathrm{d}\vartheta_2 \right|$$

3. Une telle fonction g existe car l'opérateur P a un trou spectral dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ comme nous l'avons vu dans l'introduction de la thèse.

Cette distance n'est pas du tout adaptée à notre étude puisque la mesure $\rho^{*n} * \delta_x$ est toujours atomique (et même à support fini si ρ l'est) et on a donc, pour tout $x \in \mathbb{T}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d_{\mathrm{var}}(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) = 2$$

Cependant, on peut aussi calculer la distance entre ϑ_1 et ϑ_2 vues comme formes linéaires sur l'espace $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ des fonction $\gamma-$hölderiennes sur $\mathbf{X}$. On fait donc la

Définition 4.1.1 (distance de Kantorovich)**.**
Soient ϑ_1, ϑ_2 deux mesures boréliennes de probabilité sur un espace métrique compact $(\mathbf{X}, d)$.
Pour $\gamma \in]0,1]$, on définit la $\gamma-$distance de Kantorovich entre ϑ_1 et ϑ_2 par

$$\mathcal{W}_\gamma(\vartheta_1, \vartheta_2) = \sup_{f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})\ \|f\|_\gamma \leqslant 1} \left| \int f \mathrm{d}\vartheta_1 - \int f \mathrm{d}\vartheta_2 \right|$$

Remarque 4.1.2. Nous renvoyons lecteur à [Vil09] pour plus de détails sur cette distance.

Sur le tore, la distance de Kantorovich entre une mesure et la mesure de Haar est fortement liée à la décroissance des coefficients de Fourier de la mesure considérée. En fait, nous pouvons montrer le

Lemme 4.1.3. *Pour tout $\gamma \in]0,1]$, il existe une constante C ne dépendant que de γ et d (et de la norme choisie sur $\mathbb{R}^d$) telle que pour toute mesure borélienne de probabilité ϑ sur le tore $\mathbb{T}^d$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, si $\mathcal{W}_\gamma(\vartheta, \nu) > t$ alors il existe $a \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ tel que $|\widehat{\vartheta}(a)| \geqslant Ct^C\|a\|$ où nous avons noté ν la mesure de Lebesgue sur le tore.*

Pour démontrer ce lemme, nous aurons besoin d'un résultat de Jackson et Bernstein à propos de la vitesse avec laquelle on peut approcher en norme infinie une fonction hölderienne par des fonctions régulières.
Pour $r \in \mathbb{N}^*$, nous définissons l'espace de Sobolev

$$\mathcal{H}^r := \left\{ f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{T}^d) \middle| \sum_{a \in \mathbb{Z}^d} |\widehat{f}(a)|^2 (1 + \|a\|)^{2r} < +\infty \right\}$$

Lemme 4.1.4 (Jackson, Bernstein)**.** *Soient $\gamma \in]0,1]$ et $r \in [1, +\infty[$.*
Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{T}^d)$, il existe une suite $(f_n) \in \mathcal{H}^r(\mathbb{T}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int f \mathrm{d}\nu = \int f_n \mathrm{d}\nu, \quad \|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^\gamma} \|f\|_\gamma \text{ et } \|f_n\|_{\mathcal{H}^r} \leqslant C\|f\|_\infty n^C$$

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, on note $k_m(y) = \left(\frac{\sin(2\pi m y)}{\sin(\pi y)}\right)^4$ et pour un point $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{T}^d$, on note $K_m(y) = \prod_{i=1}^d k_m(y_i)$. Finalement, on note $I_m = \left(\int_{-1/4}^{1/4} k_m(y)\mathrm{d}y\right)^{-1}$.

Définissons, pour $x \in \mathbb{T}^d$,

$$f_m(x) = \int_{[-1/4,1/4]^d} I_m^d f(x+2y) K_m(y)\mathrm{d}y = \frac{I_m^d}{2} \int_{[-1/2,1/2]^d} f(y) K_m(\frac{y-x}{2})\mathrm{d}y$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f_m(x)| &= \left| \int_{[-1/4,1/4]^d} I_m^d (f(x) - f(x+2y)) K_m(y)\mathrm{d}y \right| \\
&\leqslant I_m^d 2^\gamma \|f\|_\gamma \int_{[-1/4,1/4]^d} \|y\|^\gamma K_m(y)\mathrm{d}y \leqslant I_m^d 2^{d+\gamma} \|f\|_\gamma \int_{[0,1/4]^d} \|y\|^\gamma K_m(y)\mathrm{d}y \\
&\leqslant d I_m^d 2^{d+\gamma} \|f\|_\gamma \int_{[0,1/4]^d} (y_1^\gamma + \cdots + y_d^\gamma) K_m(y)\mathrm{d}y \\
&\leqslant d^2 I_m 2^{d+\gamma} \|f\|_\gamma \int_{[0,1/4]} y^\gamma k_m(y)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

où on a utilisé dans le dernière inégalité que

$$I_m^d \int_{[0,1/4]^d} y_1^\gamma K_m(y)\mathrm{d}y = I_m \int_{[0,1/4]} y^\gamma k_m(y)\mathrm{d}y$$

Notons,

$$J_{m,\gamma} := 2\int_0^{1/4} y^\gamma k_m(y)\mathrm{d}y = 2\int_0^{1/4} y^\gamma \left(\frac{\sin(2\pi m y)}{\sin(\pi y)}\right)^4 \mathrm{d}y$$

Alors, en utilisant que pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\frac{2t}{\pi} \leqslant \sin(t) \leqslant t$, on trouve que

$$\frac{1}{\pi^4}\int_0^{\pi/4} y^{\gamma-4} \left(\sin(2\pi m y)\right)^4 \mathrm{d}y \leqslant J_{m,\gamma} \leqslant \frac{1}{2^4}\int_0^{\pi/4} y^{\gamma-4} \left(\sin(2\pi m y)\right)^4 \mathrm{d}y := \frac{1}{2^4} L_{m,\gamma}$$

par ailleurs,

$$L_{m,\gamma} = \int_0^{m\pi/2} \left(\frac{y}{2\pi m}\right)^{\gamma-4} (\sin y)^4 \frac{\mathrm{d}y}{2\pi m} = (2\pi m)^{3-\gamma} \int_0^{m\pi/2} y^{\gamma-4} (\sin y)^4 \mathrm{d}y$$

et donc,

$$L_{m,\gamma} \asymp m^{3-\gamma}$$

d'où

$$J_{m,\gamma} \asymp m^{3-\gamma}$$

et finalement,

$$I_m \int_0^{1/4} y^\gamma k_m(y)\mathrm{d}y = \frac{J_{m,\gamma}}{J_{m,0}} \asymp m^{-\gamma}$$

et donc, ce que nous avons montré, c'est qu'il existe une constante C telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{T}^d)$,

$$\|f - f_m\|_\infty \leqslant \frac{C}{m^\gamma}\|f\|_\gamma$$

Il ne reste donc plus qu'à voir que

$$\|f_m\|_{\mathcal{H}^r} \leqslant C\|f\|_\infty m^{rd}$$

Or, il est clair que pour tout $a \in \mathbb{Z}^d$,

$$|\widehat{f}_m(a)| \leqslant \|f\|_\infty$$

et, en utilisant que $f_m = f * K_m$ et que K_m est un polynôme trigonométrique de degré au plus Cm^4 pour une certaine constante C comme on peut le voir en développant

$$\begin{aligned} k_m(y) &= \left(\frac{\sin(2\pi m y)}{\sin(\pi y)}\right)^4 = \left(\frac{e^{-2i\pi m y} - e^{2i\pi m y}}{e^{-i\pi y} - e^{i\pi y}}\right)^4 = e^{4i\pi y}\left(\frac{e^{-2i\pi m y} - e^{2i\pi m y}}{1 - e^{2i\pi y}}\right)^4 \\ &= e^{4i\pi y}\left(\sum_{k=-m}^{m-1} e^{2i\pi k y}\right)^4 \end{aligned}$$

on a que pour $\|a\| > Cm^4$, $\widehat{K}_m(a) = 0$.

Et cela montre que

$$\begin{aligned} \|f_m\|_{\mathcal{H}^r} &= \left(\sum_{a\in\mathbb{Z}^d} (1+\|a\|)^{2r}|\widehat{f}_m(a)|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{\|a\|\leqslant Cm^4} (1+\|a\|)^{2r}\right)^{1/2} \|f\|_\infty \\ &\leqslant (1+Cm^4)^r (Cm^4)^{d/2}\|f\|_\infty \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Démonstration du lemmme 4.1.3. Par définition de $\mathcal{W}_\gamma(\vartheta,\nu)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{T}^d)$ telle que $\|f\|_\gamma \leqslant 1$ et $|\int f \mathrm{d}\vartheta - \int f \mathrm{d}\nu| \geqslant t$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{\|a\|}{(1+\|a\|^2)^{r/2}} =: C_r$ est finie.

D'après le lemme 4.1.4, il existe une suite de fonctions $(f_n) \in \mathcal{H}^r(\mathbb{T}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que $\|f - f_n\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^\gamma}$ et $\|f_n\|_{\mathcal{H}^r} \leqslant Cn^C$.

Alors,

$$\begin{aligned} \left|\int f_n \mathrm{d}\vartheta - \int f_n \mathrm{d}\nu\right| &\geqslant \left|\int f \mathrm{d}\vartheta - \int f \mathrm{d}\nu\right| - \left|\int (f-f_n)\mathrm{d}\vartheta - \int (f-f_n)\mathrm{d}\nu\right| \\ &\geqslant t - 2\|f-f_n\|_\infty \geqslant t - \frac{2C}{n^\gamma} \end{aligned}$$

mais,

$$\begin{aligned}\left|\int f_n \mathrm{d}\vartheta - \int f_n \mathrm{d}m\right| &= \left|\sum_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \widehat{f_n}(a)\widehat{\vartheta}(a)\right| \leqslant \sum_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \left|\widehat{f_n}(a)\widehat{\vartheta}(a)\right| \\ &\leqslant \sum_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{\|f_n\|_{\mathcal{H}^r}}{(1+\|a\|^2)^{r/2}}|\widehat{\vartheta}(a)| \leqslant \|f_n\|_{\mathcal{H}^r} C_r \sup_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{|\widehat{\vartheta}(a)|}{\|a\|} \\ &\leqslant C n^C C_r \sup_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{|\widehat{\vartheta}(a)|}{\|a\|}\end{aligned}$$

et donc,

$$\sup_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{|\widehat{\vartheta}(a)|}{\|a\|} \geqslant \frac{t-\frac{2C}{n^\gamma}}{CC_r n^C}$$

donc, en prenant $n = \lfloor\left(\frac{4C}{t}\right)^{1/\gamma}\rfloor + 1$ nous avons que $t - 2\frac{C_1}{n^\gamma} \geqslant t/2$ et il existe une constante C' telle que

$$\sup_{a\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0\}} \frac{|\widehat{\vartheta}(a)|}{\|a\|} \geqslant C' t^{1+C/\gamma}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Avec le lemme 4.1.3, nous obtenons directement un corollaire du théorème 4.1.

Proposition 4.1.5 ([BFLM11] reformulé pour la distance de Kantorovich)**.** *Soit ρ une mesure de probabilité sur Γ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe agissant de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\gamma \in]0,1]$, il existe une constante $C \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,1/2]$ avec $n \geqslant -C\ln t$ et tout $x \in \mathbb{T}^d$, si

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \geqslant t$$

alors, il existe $p/q \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ avec $|q| \leqslant Ct^{-C}$ tel que

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-(\lambda_1-\varepsilon)n}$$

La proposition précédente montre que si nous fixons un $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et si la distance entre $\rho^{*n} * \delta_x$ et ν est plus grande que $e^{-\gamma n}$, alors x est bien approché par des rationnels : le p/q construit vérifie $q \leqslant Ce^{\gamma C n}$ et donc,

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-(\lambda_1-\varepsilon)n} \leqslant \left(\frac{C}{q}\right)^{(\lambda_1-\varepsilon)/\gamma C}$$

Nous allons renverser cela pour, étant donnée une condition diophantienne φ, trouver une vitesse de convergence.

Nous fixons donc une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty[$.

Pour $x \in \mathbf{X}$, on note

$$h_\varphi(x) = \sup_{p/q \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d} \frac{1}{\varphi(q) d\left(x, \frac{p}{q}\right)} \tag{4.1.1}$$

Ainsi, un point $M-$diophantien est un point pour lequel h_φ est fini avec le choix de $\varphi(t) = t^M$ et donc si φ croît plus vite que tout polynôme, $\nu(h_\varphi < +\infty) = 1$.

Remarquons également que h_φ étant semi-continue inférieurement (puisque c'est la borne supérieure de fonctions semi-continues inférieurement), elle est minorée sur $\mathbb{T}^d$ et atteint son minimum qui est donc nécessairement strictement positif.

Proposition 4.1.6. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un groupe agissant de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout $\gamma, \delta \in]0, 1]$, il existe des constantes $C, C_0, C_1 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour toute fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) \geqslant 1 + t^2$, tout $x \in \mathbb{T}^d$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \leqslant C\psi(n) h_\varphi(x)^\delta$$

où h_φ est la fonction définie dans l'équation (4.1.1) et ψ est la fonction définie par

$$\psi(t) = \left(\varphi^{-1}(e^{C_1 t})\right)^{-C_0}$$

Remarque 4.1.7. L'hypothèse de croissance sur φ n'est pas restrictive puisque d'après le théorème d'approximation diophantienne de Dirichlet, si $\varphi(t) = o(t^{1+1/d})$, alors la fonction h_φ ne prend que des valeurs infinies.

Remarque 4.1.8. Si nous prenons $\varphi(n) = n^M$, alors nous avons $\psi(n) = e^{-\kappa n}$ pour un certain $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$ et cela montre que pour un point diophantien générique, la vitesse de convergence est exponentielle.

Nous aurons besoin par la suite que la somme des $\psi(n)$ soit finie et nous prendrons donc $\psi(n) = n^{-1-\alpha}$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Cela nous permettra donc d'étudier tous les points $x \in \mathbb{T}^d$ tels que l'inéquation

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-Bq^\beta}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ où β, B seront des constantes dépendant de C_0 et donc de ρ.

Démonstration. Soit $C_0, C_1, C \in [5, +\infty[$ que nous fixerons plus tard.

Soient $x \in \mathbf{X}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Nous notons C_2 la constante donnée par la proposition 4.1.5.

Si $C\psi(n)h_\varphi(x)^\delta \geqslant 2$, alors l'inégalité est vérifiée car $\|P^n f - \int f \mathrm{d}m\|_\infty \leqslant 2\|f\|_\infty$.

On peut donc supposer que $C\psi(n)h_\varphi(x)^\delta \leqslant 2$.

Soit $t = \frac{C}{5}\psi(n)h_\varphi(x)^\delta$. Alors, $t < \frac{1}{2}$ et

$$-C_2 \ln t = -C_2 \ln\left(\frac{C}{5}\psi(n)h_\varphi(x)^\delta\right) \leqslant -C_2 \ln\left(\psi(n)\right) = C_2 C_0 \ln \varphi^{-1}(e^{C_1 n})$$

car $Ch_\varphi(x)/5 \geqslant 1$ puisque $C \geqslant 5$ et $h_\varphi(x) \geqslant 1$.

Or, par hypothèse φ est strictement croissante et $\varphi(t) \geqslant 1 + t^2$ et donc,

$$\varphi^{-1}(s) \leqslant \sqrt{s}$$

et donc, $\ln \varphi^{-1}(e^{C_1 n}) \leqslant C_1 n/2$ et donc, $-C_2 \ln t \leqslant C_2 C_1 C_0 n/2 \leqslant n$ si C_0 et C_1 sont assez petits (dépendant de C_2).

On peut donc appliquer la proposition 4.1.5 pour trouver que si

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \geqslant t$$

alors, il existe $p/q \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ avec $q \leqslant C_2 t^{-C_2}$ tel que

$$d\left(x, \frac{p}{q}\right) \leqslant e^{-\lambda n}$$

ainsi, comme on peut toujours supposer que $C_2\left(\frac{5}{C}\right)^{C_2} \leqslant 1$ et $C_0 C_2 \leqslant 1$, on a que

$$\begin{aligned} q &\leqslant C_2\left(\frac{5}{C\psi(n)h_\varphi(x)^\delta}\right)^{C_2} \leqslant C_2\left(\frac{5}{C\psi(n)}\right)^{C_2} = C_2\left(\frac{5}{C}\right)^{C_2}\left(\varphi^{-1}(e^{C_1 n})\right)^{C_2 C_0} \\ &\leqslant \varphi^{-1}(e^{C_1 n}) \end{aligned}$$

et

$$e^{\lambda n} \leqslant \|x - p/q\|^{-1} \leqslant \varphi(q)h_\varphi(x) \leqslant \varphi(q)\left(\frac{2}{C\psi(n)}\right)^{1/\delta} \leqslant e^{C_1 n}\left(\frac{2}{C\psi(n)}\right)^{1/\delta}$$

et donc,

$$\psi(n) \leqslant \frac{2}{C} e^{-\delta(\lambda - C_1)n}$$

or,

$$\psi(n) \geqslant \left(\frac{e^{C_1 n}}{C_3}\right)^{-C_0}$$

ce qui amène une contradiction si $C_1 < \lambda$, C_0 est choisi assez petit et C assez grand.

Et donc, il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ et de $x \in \mathbf{X}$ tels que $C\psi(n)h_\varphi(x)^\delta \leqslant 2$ et

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \geqslant \frac{1}{5} C\psi(n)h_\varphi(x)^\delta$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \leqslant C\psi(n)h_\varphi(x)^\delta$$

ce qu'il fallait démontrer. □

4.2 Contrôle diophantien le long d'une trajectoire

> Dans cette section, nous allons voir que, si $x \in \mathbb{T}^d$ vérifie une certaine condition diophantienne, alors tous les gx, avec $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ aussi. Et puis, nous en déduirons un contrôle de la vitesse de convergence dans la proposition 4.1.5.

Nous avons vu dans la proposition 4.1.6 que pour tout point irrationnel x de $\mathbb{T}^d$, $\rho^{*n} * \delta_x$ converge pour la distance de Kantorovich vers la mesure de Haar sur le tore. De plus, la vitesse de convergence dépend de la manière dont x peut être approché par des points rationnels.

Pour étudier le théorème central limite, on aura besoin de contrôler la vitesse de convergence de $\rho^{*n} * \delta_y$ pour tout point y de $\mathbf{G}x$; le problème étant que la fonction h_φ peut y prendre des valeurs arbitrairement grandes.

Cependant, l'ensemble des points où h_φ est finie est invariant pour l'action de Γ comme nous pouvons le voir en notant que si $x \in \mathbb{T}^d$, $r \in \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$ et $g \in \Gamma$, alors,

$$\|g\| d(x, g^{-1}r) \geqslant d(gx, r) = d(gx, gg^{-1}r) \geqslant \frac{1}{\|g^{-1}\|} d(x, g^{-1}r)$$

et $g^{-1}r$ est un rationnel de même dénominateur que r (puisque g^{-1} est à coefficients entiers) et cette estimation montre donc que pour tout $g \in \Gamma$,

$$h_\varphi(gx) \leqslant \|g^{-1}\| h_\varphi(x)$$

Dans cette section, nous allons montrer que nous pouvons obtenir beaucoup mieux que cette première majoration. Nous allons en effet voir que pour tout point irrationnel x du tore, en moyenne, gx est moins bien approché par des rationnels que x.

Pour cela, nous commençons par montrer que, en moyenne, gx est plus loin de 0 que x. C'est l'objet de la proposition 4.2.2 pour laquelle nous aurons besoin du

Lemme 4.2.1. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Pour $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$, on note

$$u_\delta(x) = \frac{1}{d(x,0)^\delta}$$

Alors, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in [0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$,

$$P^{n_0} u_\delta(x) \leqslant a u_\delta(x) + b$$

Démonstration. La preuve se fait en remontant la situation à $\mathbb{R}^d$ car on sait que sous les hypothèses du lemme, le premier exposant de Lyapunov est strictement positif.

Si la mesure n'est pas à support compact, il faut faire attention car rien ne permet de garantir que si on prend deux points x et y dans $\mathbb{R}^d$ dont l'image par g est proche dans le tore alors leur image est également proche dans $\mathbb{R}^d$. Mais comme la mesure a un moment exponentiel, nous contrôlons bien les éléments de $\operatorname{supp} \rho^{*n}$ ayant une trop grande norme et nous pourrons conclure.

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ et $\overline{x} \in B(0,\varepsilon) \subset \mathbb{T}^d$. On choisit un représentant x de $\overline{x}$ dans la boule de centre 0 et de rayon ε de $\mathbb{R}^d$. Alors,

$$\begin{aligned}
P^n u_\delta(\overline{x}) &= \int_{\mathbf{G}} d(g\overline{x},0)^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&= \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}} d(g\overline{x},0)^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) + \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| > \frac{1}{2\varepsilon}} d(g\overline{x},0)^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&= \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| \leqslant \frac{1}{2\varepsilon}} \|gx\|^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) + \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| > \frac{1}{2\varepsilon}} d(g\overline{x},0)^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \int_{\mathbf{G}} \|gx\|^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) + \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| > \frac{1}{2\varepsilon}} \|g^{-1}\|^\delta \|x\|^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \|x\|^{-\delta} \left(\int_{\mathbf{G}} e^{-\delta \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) + \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| > \frac{1}{2\varepsilon}} \|g^{-1}\|^\delta \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \right)
\end{aligned}$$

De plus, il existe $\delta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $\delta \in]0,\delta_0]$ il existe $C, t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \int_{\mathbf{G}} e^{-\delta \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant Ce^{-tn}$$

Nous ne démontrons pas ici ce résultat mais plus tard, dans le lemme 8.2.3.

Et donc, on trouve que pour tout $x \in B(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$,

$$P^n u_\delta(\overline{x}) \leqslant u_\delta(\overline{x}) \left(Ce^{-tn} + \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\| > \frac{1}{2\varepsilon}} \|g^{-1}\|^\delta \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \right)$$

soit donc n_0 tel que $Ce^{-tn_0} \leqslant 1/4$ et ε tel que

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\|g\|>\frac{1}{2\varepsilon}} \|g^{-1}\|^\delta \mathrm{d}\rho^{*n_0}(g) \leqslant 1/4$$

(un tel ε existe (quitte à diminuer la valeur de δ) car ρ a un moment exponentiel).

On obtient donc, que pour ce choix de n_0 et de ε, pour tout $\overline{x} \in B(0,\varepsilon) \setminus \{0\}$,

$$P^{n_0} u_\delta(x) \leqslant \frac{1}{2} u_\delta(x)$$

Par ailleurs, si $\overline{x}$ est dans le complémentaire de la boule, alors,

$$\begin{aligned} P^n u_\delta(\overline{x}) &= \int_{\mathbf{G}} d(g\overline{x},0)^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant d(\overline{x},0)^{-\delta} \int_{\mathbf{G}} \|g^{-1}\|^\delta \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\ &\leqslant \varepsilon^{-\delta} \int_{\mathbf{G}} \|g^{-1}\|^\delta \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \end{aligned}$$

et cela termine la preuve du lemme. □

Dorénavant, nous fixons δ tel que la fonction u_δ vérifie $P^{n_0} u_\delta \leqslant a u_\delta + b$ pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}^*$, $a \in [0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $a_1 \in]a,1[$ tel que $a_1^{-n_0} a \leqslant 1$.

On note

$$u_0 = \sum_{k=0}^{n_0-1} a_1^{-k} P^k u_\delta$$

et alors,

$$\begin{aligned} Pu_0 &= \sum_{k=0}^{n_0-1} a_1^{-k} P^{k+1} u_\delta = a_1 \sum_{k=1}^{n_0-1} a_1^{-k} P^k u_\delta + a_1^{-(n_0-1)} P^{n_0} u_\delta \\ &\leqslant a_1 \sum_{k=1}^{n_0-1} a_1^{-k} P^k u_\delta + a_1^{-(n_0-1)} (a u_\delta + b) \\ &\leqslant a_1 u_0(x) + b a_1^{-(n_0-1)} \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme

$$u_\delta(x) \int_{\mathbf{G}} \|g\|^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*k}(g) \leqslant P^k u_\delta(x) = \int_{\mathbf{G}} \|gx\|^{-\delta} \mathrm{d}\rho^{*k}(g) \leqslant u_\delta(x) \int_{\mathbf{G}} \|g^{-1}\|^\delta \mathrm{d}\rho^{*k}(g),$$

la fonction u_0 que nous avons construite est encore équivalente à $\|x\|^{-\delta}$ où plus précisément,

$$0 < \inf_{x \in \mathbb{T}^d \setminus 0} \frac{u_0(x)}{d(x,0)^{-\delta}} < \sup_{x \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}} \frac{u_0(x)}{d(x,0)^{-\delta}} < +\infty.$$

Ce que nous avons donc montré c'est donc la

Proposition 4.2.2. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Alors, il existe $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, $a \in [0,1[$, $b \in \mathbb{R}$ et une fonction u_0 sur $\mathbb{T}^d$, tels que

$$0 < \inf_{x \in \mathbb{T}^d \setminus 0} \frac{u_0(x)}{d(x,0)^{-\delta}} < \sup_{x \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}} \frac{u_0(x)}{d(x,0)^{-\delta}} < +\infty$$

et

$$P u_0 \leqslant a u_0 + b$$

Comme évoqué précédemment, cette inégalité $Pu_0 \leqslant au_0 + b$ veut dire que si x est proche de 0 alors le terme dominant dans $au_0(x) + b$ est $au_0(x)$ (par exemple si $u_0(x) \geqslant \frac{2b}{1-a}$ alors $Pu_0(x) \leqslant \frac{1+a}{2} u_0(x)$) et donc, $Pu_0(x) \leqslant u_0(x)$ ce qui veut dire que, en moyenne, $u_0(gx)$ est plus petit que $u_0(x)$ ou autrement dit, gx est plus loin de 0 que x.

Nous allons à présent nous servir de cette fonction u_0 pour en construire d'autres permettant de voir que si x est bien approché par des rationnels, alors gx est moins bien approché que x. Nous ne savons pas construire une telle fonction qui soit en plus finie sur les irrationnels.

Ce que nous allons faire, c'est donc, pour une condition diophantienne φ fixée, construire une fonction u_φ telle que $Pu_\varphi \leqslant au_\varphi + b$ et telle que u_φ est finie seulement sur les points vérifiant la condition diophantienne φ.

Pour $Q \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{X}_Q$ l'ensemble des éléments primitifs de $\frac{1}{Q}\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d$ c'est-à-dire l'ensemble des éléments de $\frac{1}{Q}\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d$ qui ne sont pas dans $\frac{1}{q}\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d$ pour $q < Q$.

Alors, $\mathbf{X}_Q$ est $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})-$invariant : en effet, si $p \in \mathbf{X}_Q$ alors $gp \in \frac{1}{Q}\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d$ car g est à coefficients entiers et gp ne peut pas être dans un $\frac{1}{q}\mathbb{Z}^d/\mathbb{Z}^d$ avec $q < Q$ car sinon $x = g^{-1}gx$ y serait aussi.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction strictement croissante. Pour $x \in \mathbb{T}^d \setminus \{0\}$, on note

$$u_\varphi(x) = 1 + \sum_{Q \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\varphi(Q)^\delta} \sum_{r \in \mathbf{X}_Q} u_0(x - r)$$

cette fonction u_φ est propre (elle est positive et semi-continue inférieurement)

De plus, elle traduit des propriétés diophantiennes de x.

En effet, par définition de $h_\varphi(x)$, nous avons que, pour une certaine constante C_0 ne dépendant pas de φ,

$$h_\varphi(x)^\delta \leqslant C_0 u_\varphi(x)$$

et réciproquement, si $\varphi' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une autre fonction croissante telle que $\varphi'(Q) \in \mathcal{O}(\varphi(Q)Q^{-(d+2)/\delta)})$ alors,

$$u_\varphi(x) \leqslant C_0 h_{\varphi'}(x)^\delta \sum_{Q\in\mathbb{N}^*} Q^d \left(\frac{\varphi'(Q)}{\varphi(Q)}\right)^\delta$$

et donc, si $h_{\varphi'}(x)$ est finie, $u_\varphi(x)$ l'est également.

Ainsi, contrôler $u_\varphi(x)$, c'est contrôler les propriétés diophantiennes de x et réciproquement.

Cela prends tout son sens grâce au

Lemme 4.2.3. *Soit u_0 la fonction donnée par le lemme précédent.*

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante et telle que

$$\sum_n \frac{n^d}{\varphi(n)^\delta} < +\infty$$

Pour $x \in \mathbb{T}^d$, on note

$$u_\varphi(x) = 1 + \sum_{Q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\varphi(Q)^\delta} \sum_{r\in\mathbf{X}_Q} u_0(x-r)$$

Alors, u_φ est une fonction de dérive exponentielle : c'est-à-dire qu'il existe $a \in]0,1[$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que

$$Pu_\varphi \leqslant au_\varphi + b$$

Remarque 4.2.4. Il faut penser que φ est une fonction qui croît très rapidement (on aura $\varphi(n) = e^{Bn^\beta}$) et donc l'hypothèse de sommabilité sera toujours vérifiée et modifier φ par un polynôme ne change essentiellement pas les points où u_φ prend des valeurs finies et donc il est essentiellement équivalent de dire que $u_\varphi(x)$ est fini ou que $h_\varphi(x)$ l'est.

Démonstration. Rappelons que $Pu_0 \leqslant au_0 + b$.

Et donc, si on note, pour $Q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{T}^d \setminus \mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$,

$$u_Q(x) = \sum_{r\in\mathbf{X}_Q} u_0(x-r)$$

nous avons, en utilisant que $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ agit par permutation sur $\mathbf{X}_Q$, que

$$\begin{aligned} Pu_Q(x) &= \int_{\mathbf{G}} \sum_{r\in\mathbf{X}_Q} u_0(gx-r)\mathrm{d}\rho(g) = \int_{\mathbf{G}} \sum_{r\in\mathbf{X}_Q} u_0(g(x-r))\mathrm{d}\rho(g) \\ &= \sum_{r\in\mathbf{X}_Q} Pu_0(x-r) \leqslant a \sum_{r\in\mathbf{X}_Q} u_0(x-r) + b|\mathbf{X}_Q| \\ &\leqslant au_Q(x) + bQ^d \end{aligned}$$

où nous avons utilisé que $|\mathbf{X}_Q| \leqslant Q^d$.

Et donc,

$$P(u_\varphi)(x) \leqslant 1 + \sum_{Q\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{\varphi(Q)^\delta} P u_Q(x) \leqslant a u_\varphi(x) + 1 - a + b \sum_{Q\in\mathbb{N}^*} \frac{Q^d}{\varphi(Q)^\delta} \qquad \square$$

Finalement, nous pouvons établir la vitesse de convergence de $\rho^{*n} * \delta_x$ vers la mesure de Lebesgue sur le tore avec la fonction u_φ dans le

Corollaire 4.2.5. *Sous les hypothèses de la proposition 4.1.6, pour tout $\gamma \in]0,1]$, et tout $M \in \mathbb{R}_+^*$, il existe une constante $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour tout $B \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\beta \in]0,\beta_0[$, il existe une constante C telle que, en notant $\varphi(n) = e^{Bn^\beta}$, on a que pour tout x tel que*

$$u_\varphi(x) < +\infty$$

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \leqslant \frac{C}{n^{1+M}} h_\varphi(x)^{\delta/3}$$

En particulier, pour toute fonction f $\gamma-$hölderienne sur le tore, il existe $g \in \mathcal{F}^3_{u_\varphi}$ (voir le paragraphe 2.2) telle que,

$$f = g - Pg + \int f \mathrm{d}\nu \text{ sur } \{u_\varphi < +\infty\} \text{ et } \|g\|_{\mathcal{F}^3_{u_\varphi}} \leqslant C C_0 \|f\|_\gamma$$

Remarque 4.2.6. Nous énonçons ce corollaire avec $h_\varphi^{\delta/3}$ et non pas avec h_φ^δ comme dans la proposition 4.1.6 car nous aurons besoin par la suite que la fonction g que nous construisons soit dans l'espace $\mathcal{F}^3_u$ pour appliquer le corollaire 2.3.9 et il est plus simple de faire cette modification ici que de chercher à montrer que u_φ^3 est encore une fonction de dérive exponentielle.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 4.1.6 en remarquant que dans ce cas, il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \leqslant \frac{C}{n^{1+M}} h_\varphi(x)^{\delta/3}$$

et donc, pour une certaine constante C' ne dépendant pas de φ,

$$\left(\sum_n \mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu)\right)^3 \leqslant C' h_\varphi(x)^\delta \leqslant C' C_0 u_\varphi(x)$$

et alors on peut noter

$$g = \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n \left(f - \int f \mathrm{d}\nu\right)$$

en remarquant que par définition de la distance de Kantorovich, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\left|P^n f(x) - \int f \mathrm{d}\nu\right| \leqslant \|f\|_\gamma \mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \qquad \square$$

4.3 Théorème central limite et loi du logarithme itéré

Dans ce paragraphe, nous utilisons les résultats du paragraphe précédent et du premier chapitre pour démontrer le théorème central limite et la loi du logarithme itéré.

Comme nous savons à présent, grâce au corollaire 4.1.6, que les fonctions hölderiennes s'écrivent $f = g - Pg + \int f \mathrm{d}\nu$ où g est dominée par une fonction de dérive exponentielle finie sur les points mal approchés par des rationnels, nous allons vérifier la validité de l'hypothèse de type loi des grands nombres du corollaire 2.3.9 qui nous permettra d'obtenir le théorème central limite et la loi du logarithme itéré. Nous ne savons pas démontrer la loi des grands nombres pour des fonctions de $\mathrm{L}^\infty_{u^3}(\mathbf{X})$ c'est pourquoi nous serons obligés de repasser à la fonction f pour utiliser la vitesse de convergence donnée par le résultat de Bourgain, Furmann, Lindenstrauss et Mozes.

Pour montrer l'hypothèse de convergence presque-sûre de la variance nécessaire pour utiliser le corollaire 2.3.9, nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 4.3.1. *Sous les hypothèses du corollaire 4.2.5.*

Pour tout $\gamma \in]0,1]$ et tout $\eta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\beta \in]0, \beta_0[$ et tout $B \in \mathbb{R}_+^*$, en notant $\varphi(q) = e^{Bq^\beta}$, nous avons que pour toute suite (f_n) de fonctions $\gamma-$hölderiennes sur le tore telles que $\int f_n \mathrm{d}\nu = 0$,

$$\mathbb{E}_x \left|S_n\right|^2 \in \mathcal{O}\left(n u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^2\right)$$

et,

$$\mathbb{E}_x \left|\sum_{k=0}^{n-1} f_k(X_k)\right|^4 \in \mathcal{O}\left(n^{2+\eta} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^4\right)$$

Où les constantes impliquées ne dépendent ni de n, ni de x et ni de la suite (f_n).

Remarque 4.3.2. Ce qu'il y a derrière ce lemme, c'est un type d'inégalité de Burckholder qui nous dit que si les (Y_i) sont des variables aléatoires réelles iid bornées et d'espérance nulle, alors pour tout $r \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=0}^{n-1} Y_k\right|^r \in \mathcal{O}\left(n^{r/2}\right)$$

Démonstration. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\eta < 1/2$ et on choisit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\alpha \geqslant 2/\eta - 1$. On note $\psi(n) = n^{-\alpha}$ et d'après le corollaire 4.2.5, il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\mathcal{W}_\gamma(\rho^{*n} * \delta_x, \nu) \leqslant \frac{C}{n^\alpha} u_\varphi(x)$$

où $\varphi(q) = e^{Bq^\beta}$ est telle que $\psi(n) \in \mathcal{O}\left(\left(\varphi^{-1}(e^{C_1 n})\right)^{-C_0}\right)$ avec C_0 et C_1 les constantes données par le corollaire 4.2.5.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, nous notons

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(X_k)$$

Dans un premier temps, nous allons montrer que

$$\mathbb{E}_x \left|S_n\right|^2 \in \mathcal{O}\left(n u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^2\right) \tag{4.3.1}$$

En effet, en utilisant que pour tout $k, l \in \mathbb{N}^*$, $\int f_k \mathrm{d}\nu = 0$ et donc

$$|P^l f_k(x)| \leqslant \frac{C}{l^\alpha}\|f_k\|_\gamma u_\varphi(x), \text{ et } P^l u_\varphi(x) \leqslant u_\varphi(x) + \frac{b}{1-a}$$

nous pouvons développer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x S_n^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E}_x f_k^2(X_k) + 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k-1} \mathbb{E}_x f_k(X_k) f_l(X_l) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} P^k f_k^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k-1} P^l(f_l P^{k-l} f_k)(x) \\
&\leqslant n \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\infty^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k-1} P^l(|P^{k-l} f_k|)(x)\|f_l\|_\infty \\
&\leqslant n \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\infty^2 + 2\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{k-1} \frac{C}{(k-l)^\alpha}\left(u_\varphi(x) + \frac{b}{1-a}\right)\|f_k\|_\gamma \|f_l\|_\infty
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer car $\alpha > 1$ et puisque par définition de u_φ, nous avons que $u_\varphi(x) \geqslant 1$.

De la même manière, nous pouvons maintenant développer

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x|S_{n+1}|^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\mathbb{E}_x f_n(X_n)^k S_n^{4-k} \\
&= \mathbb{E}_x|S_n|^4 + 4\mathbb{E}_x f_n(X_n) S_n^3 + \sum_{k=2}^{4}\binom{4}{k}\mathbb{E}_x\left[(f_n(X_n))^k S_n^{4-k}\right]
\end{aligned}$$

Nous notons donc

$$A_n := \mathbb{E}_x f_n(X_n) S_n^3 \text{ et } B_n := \sum_{k=2}^{4}\binom{4}{k}\mathbb{E}_x\left[(f_n(X_n))^k S_n^{4-k}\right]$$

Alors, nous avons que

$$|B_n| \leqslant 6 \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\infty^2 \mathbb{E}_x S_n^2 + 4 \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\infty^3 \mathbb{E}_x |S_n| + \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\infty^4$$

et donc, d'après l'inégalité (4.3.1),

$$B_n \in \mathcal{O}\left(n u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^4 \right) \tag{4.3.2}$$

Pour traiter le terme A_n, nous notons $p(n) = n - \lfloor n^\eta \rfloor$ (et même simplement p pour alléger les notations). Alors, nous pouvons développer

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} \mathbb{E}_x f_n(X_n)(S_n - S_p)^k S_p^{3-k} \\ &= \mathbb{E}_x f_n(X_n) S_p^3 + \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} \mathbb{E}_x f_n(X_n)(S_n - S_p)^k S_p^{3-k} \end{aligned}$$

Nous notons chacun de ces deux termes A_n^1 et A_n^2. Alors, nous avons que

$$\begin{aligned} |A_n^1| = \left| \mathbb{E}_x P^{n-p+2} f_n(X_{p-1}) S_p^3 \right| &\leqslant \frac{C}{(n-p+2)^\alpha} \|f_n\|_\gamma \mathbb{E}_x u(X_{p-1}) |S_p|^3 \\ &\leqslant \frac{C}{(n^\eta+1)^\alpha} \|f_n\|_\gamma \|S_p\|_\infty^3 P^{p-1} u_\varphi(x) \\ &\leqslant \frac{C}{(n^\eta+1)^\alpha} \|f_n\|_\gamma \|S_p\|_\infty^3 \left(a^{p-1} + \frac{b}{1-a} \right) u_\varphi(x) \\ &\in \mathcal{O}\left(n^{3-\eta\alpha} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^4 \right) \in \mathcal{O}\left(n^{1+\eta} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^4 \right) \end{aligned}$$

De plus,

$$|A_n^2| \leqslant \sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} \|f_n\|_\infty \|S_n - S_p\|_\infty^k \mathbb{E}_x |S_p|^{3-k}$$

or,

$$\|S_n - S_p\|_\infty \leqslant \sum_{k=p}^{n-1} \|f_p\|_\infty \leqslant (n-p) \sup_{k\in[0,n-1]} \|f_k\|_\infty$$

et

$$\mathbb{E}_x |S_n| \leqslant \left(\mathbb{E}_x |S_n|^2 \right)^{1/2}$$

et donc, d'après l'inégalité (4.3.1), comme $\eta < 1/2$, nous avons que

$$A_n^2 \in \mathcal{O}\left(n^{1+\eta} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|_\gamma^4 \right)$$

et donc nous avons démontré que

$$A_n = \mathcal{O}\left(n^{1+\eta} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|^4\right) \tag{4.3.3}$$

Finalement, en réunissant les inégalités (4.3.2) et (4.3.3), on obtient que

$$\mathbb{E}_x|S_{n+1}|^4 = \mathbb{E}_x|S_n|^4 + \mathcal{O}\left(n^{1+\eta} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|^4\right)$$

et en itérant cette relation, nous trouvons que

$$\mathbb{E}_x|S_{n+1}|^4 = \mathcal{O}\left(n^{2+\eta} u_\varphi(x) \max_{k\in[0,n]} \|f_k\|^4\right)$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Nous pouvons à présent démontrer la convergence presque-sûre de la variance dans le

Lemme 4.3.3. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support agit de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$.*

Alors, pour tout $\gamma \in]0,1]$ il existe $\beta_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $\beta \in]0,\beta_0[$ et tout $B \in \mathbb{R}_+^*$, en notant $\varphi(q) = e^{Bq^\beta}$, nous avons que pour toute fonction $\gamma-$hölderienne f sur le tore, en notant g la solution de l'équation de Poisson définie dans $\mathcal{F}^3_{u_\varphi}$ et donnée par le corollaire 4.2.5 nous avons que pour tout $x \in \mathbf{X}$ tel que $u_\varphi(x)$ est fini,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(g^2)(X_k) - (Pg(X_k))^2 \to \int g^2 - (Pg)^2 \mathrm{d}\nu \quad \mathbb{P}_x - p.s. \text{ et dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)$$

Démonstration. Premièrement en utilisant les inclusions des espaces de fonctions hölderiennes de différents exposants et le moment exponentiel de la mesure ρ, on peut supposer sans perte de généralité que γ est assez petit pour que l'opérateur P soit continu sur l'espace des fonctions $\gamma-$hölderiennes sur le tore.

Nous prenons $\eta \in]0,1/2[$ et β_0 le paramètre donné par le lemme précédent. Alors, pour tout $B \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $\beta \in]0,\beta_0[$, nous notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) = e^{Bn^\beta}$ et ψ la fonction donnée par le corollaire 4.2.5 qui vérifie, quitte à augmenter β_0, que $\sum_n \psi(n) < +\infty$.

Remarquons dans un premier temps que pour toute fonction hölderienne f sur le tore, la fonction g donnée par le corollaire 4.2.5 est de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue. Nous pouvons voir cela comme une conséquence du lemme 2.2.9 ou, plus simplement, utiliser que sous nos hypothèses l'opérateur

P a un trou spectral dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X},\nu)$ comme nous l'avons vu dans l'introduction de cette thèse. Nous utiliserons d'ailleurs ce trou spectral dans la preuve de ce lemme.

Pour démontrer le lemme, nous supposons sans perte de généralité que $\int f \mathrm{d}\nu = 0$ et utilisons que $f = g - Pg$ pour écrire que

$$\begin{aligned} I_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(g^2)(X_k) - (Pg(X_k))^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(g^2)(X_k) - (g(X_k) - f(X_k))^2 \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(g^2)(X_k) - g^2(X_k) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(X_k))^2 + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)g(X_k) \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.3.5, et en utilisant que u est une fonction de dérive et que $g \in \mathcal{F}_u^3$, nous trouvons que pour tout x tel que $u(x)$ est fini,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(g^2)(X_k) - g^2(X_k) \to 0 \text{ dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x) \text{ et } \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

Par ailleurs, la loi des grands nombres nous montre que pour tout point x irrationnel (et donc en particulier pour tout x tel que $u(x)$ est fini),

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(X_k))^2 \to \int_{\mathbf{X}} f^2 \mathrm{d}\nu \text{ dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x) \text{ et } \mathbb{P}_x - \text{p.s.}$$

De plus, si $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une fonction croissante convergeant vers $+\infty$ que nous déterminerons plus tard, nous avons que

$$g(x) = \sum_{l=0}^{p(k)-1} P^l f(x) + \sum_{l=p(k)}^{+\infty} P^l f(x)$$

et donc,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)g(X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{p(k)-1} f(X_k)P^l f(X_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=p(k)}^{+\infty} f(X_k)P^l f(X_k)$$

Or, d'après le lemme 4.3.1 appliqué à la suite de fonctions

$$f_n = \sum_{k=0}^{p(n)-1} fP^l f - \int fP^l f \mathrm{d}\nu$$

nous avons que

$$\mathbb{E}_x\left|\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{p(k)-1}\left(f(X_k)P^l f(X_k) - \int fP^l f\mathrm{d}\nu\right)\right|^4 = \mathcal{O}\left(n^{2+\eta}u(x)\max_{k\in[0,n]}\|f_k\|_\gamma^4\right)$$

et, pour tout $k \in [0, n]$,

$$\left\| f \sum_{l=0}^{p(k)-1} P^l f \right\|_\gamma \leqslant \|f\|_\gamma^2 \sum_{l=0}^{p(k)-1} \|P\|_\gamma^l \leqslant \|f\|_\gamma^2 \|P\|_\gamma^{p(k)}$$

donc,

$$\mathbb{E}_x \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p(k)-1} \left(f(X_k) P^l f(X_k) - \int f P^l f \mathrm{d}\nu \right) \right|^4 = \mathcal{O}\left(n^{2+\eta} u(x) \|f\|_\gamma^8 \|P\|_\gamma^{p(n)} \right)$$

donc si $p(n) \sim \delta_1 \ln n$ avec δ_1 tel que $\delta_1 \ln \|P\|_\gamma < 1 - \eta$, nous avons que pour n assez grand,

$$\|P\|_\gamma^{p(n)} \leqslant e^{\delta_1 \ln n \|P\|_\gamma} = n^{\delta_1 \ln \|P\|_\gamma}$$

et donc,

$$\sum_n \frac{1}{n^4} \mathbb{E}_x \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p(k)-1} \left(f(X_k) P^l f(X_k) - \int f P^l f \mathrm{d}\nu \right) \right|^4 < +\infty$$

Ce qui montre, que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p(k)-1} f(X_k) P^l f(X_k) - \int f P^l f \mathrm{d}\nu \to 0 \ \ \mathbb{P}_x\text{-p.s. et dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)$$

De plus, en utilisant le trou spectral dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{X}, \nu)$ et le lemme de Césaro, on a que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{p(k)-1} \int f P^l f \mathrm{d}\nu \to \sum_{l=0}^{+\infty} \int f P^l f \mathrm{d}\nu$$

Nous allons montrer que le terme $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=p(k)}^{+\infty} f(X_k) P^l f(X_k)$ converge vers 0. Or, en utilisant la proposition 4.1.6, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=p(k)}^{+\infty} f(X_k) P^l f(X_k) \right| &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=p(k)}^{+\infty} |f(X_k)| |P^l f(X_k)| \\ &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=p(k)}^{+\infty} \|f\|_\infty C \psi(l) h_\varphi(X_k)^{\delta/3} \|f\|_\gamma \\ &\leqslant \frac{C'}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=p(k)}^{+\infty} \psi(l) h_\varphi(X_k)^{\delta/3} \|f\|_\gamma^2 \end{aligned}$$

pour une certaine constante C'.

Or, $(\psi(n))$ est sommable et donc,

$$\lim_{k\to+\infty}\sum_{l=p(k)}^{+\infty}\psi(l)=0$$

De plus, par définition de u_φ, $h_\varphi^{\delta/3}\in\mathcal{F}^3_{u_\varphi}$ et donc, d'après le lemme 2.3.6,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=p(k)}^{+\infty}\psi(l)h_\varphi(X_k)^{\delta/3}\to 0\ \ \mathbb{P}_x-\text{p.s. et dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)$$

Ce que nous avons démontré, c'est donc que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P(g^2)(X_k)-(Pg(X_k))^2\to-\int f^2\mathrm{d}\nu+2\sum_{l=0}^{+\infty}\int fP^lf\mathrm{d}\nu\ \ \mathbb{P}_x\text{-p.s. et dans } \mathrm{L}^1(\mathbb{P}_x)$$

et nous n'avons plus qu'à remarquer que

$$\begin{aligned}-\int f^2\mathrm{d}\nu+2\sum_{l=0}^{+\infty}\int fP^lf\mathrm{d}\nu&=\int-(g-Pg)^2+2(g-Pg)g\mathrm{d}\nu\\&=\int 2g^2-2gPg-g^2+2gPg-(Pg)^2\mathrm{d}\nu\\&=\int g^2-(Pg)^2\mathrm{d}\nu\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 4.3.4. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Alors, pour tout $\gamma\in\,]0,1]$ il existe $\beta_0\in\mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $B\in\mathbb{R}_+^*$ et tout $\beta\in\,]0,\beta_0[$ nous avons que pour tout point irrationnel $x\in\mathbb{T}^d$ tel que l'inégalité

$$d\left(x,\frac{p}{q}\right)\leqslant e^{-Bq^\beta}$$

n'a qu'un nombre fini de solutions $p/q\in\mathbb{Q}^d/\mathbb{Z}^d$, on a que pour toute fonction γ-hölderienne f sur le tore, en notant $\sigma^2(f)$ la quantité définie dans le lemme 4.3.3 on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(X_k)-\int f\mathrm{d}\nu\right)\xrightarrow{\mathcal{L}}\mathcal{N}\left(0,\sigma^2(f)\right)$$

(Si $\sigma^2=0$, la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ est une masse de Dirac en 0).

De plus, si $\sigma^2(f)\neq 0$ alors

$$\liminf\frac{\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)-\int f\mathrm{d}\nu}{\sqrt{2n\sigma^2(f)\ln\ln n}}=-1\ \ et\ \ \limsup\frac{\sum_{k=0}^{n-1}f(X_k)-\int f\mathrm{d}\nu}{\sqrt{2n\sigma^2(f)\ln\ln n}}=1$$

et, si $\sigma^2(f) = 0$ *(voir le paragraphe 3 pour une condition garantissant que cela ne peut pas être le cas si* f *n'est pas constante), alors pour* $\nu-$*presque tout* $x \in \mathbf{X}$*, la suite* $(\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) - \int f \mathrm{d}\nu)_n$ *est bornée dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{P}_x)$*.*

Démonstration. C'est un corollaire direct du lemme 4.3.3 et de la proposition 2.3.9.

La condition sur la nullité de la variance vient du corollaire 3.0.8 en remarquant que si $Pu_\varphi \leqslant au_\varphi + b$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P^n u_\varphi \leqslant a^n u_\varphi + \frac{b}{1-a}$$

et donc, pour tout x vérifiant la condition diophantienne, $\sup_n P^n(g^2)(x)$ est fini. Et par ailleurs, $\nu(x|u_\varphi(x) < +\infty) = 1$. □

Deuxième partie

Le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$

Chapitre 5

Introduction et résultats

Résumé

Dans ce chapitre, nous énonçons le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$ avec la vitesse de convergence dans le cas d'une mesure sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.

Nous démontrons par ailleurs ce théorème en utilisant les résultats des chapitres suivants.

5.1 Préliminaires

Comme expliqué dans l'introduction de cette thèse, nous avons voulu étudier la marche sur le tore au voisinage d'une orbite finie. Pour cela, nous modélisons la marche aléatoire avant qu'elle ne quitte le voisinage considéré par une marche sur le produit de $\mathbb{R}^d$ et d'un ensemble fini (comme dans le reste de la thèse, nous avons fixé un entier $d \geqslant 2$). Cela nous mène à étudier le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$ et c'est l'objet de cette seconde partie.

Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ et soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Nous définissons une marche aléatoire sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ partant de x par

$$\left\{ \begin{array}{ccc} X_0 & = & x \\ X_{n+1} & = & g_{n+1} X_n \end{array} \right.$$

où $(g_n) \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires iid de loi ρ.

Nous rappelons que nous disons qu'un sous-groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ agit de manière fortement irréductible et proximale sur $\mathbb{R}^d$ si il ne stabilise pas d'union finie de sous-espaces vectoriels non triviaux et s'il contient un élément ayant une valeur propre strictement dominante en module dont l'espace propre associé est une droite.

Si ρ a un moment d'ordre 1 [1] et si son support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, alors un résultat de Furstenberg (voir [Fur63] et [GR85]) montre que, si $\|\,.\,\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\frac{1}{n} \ln \|g_n \dots g_1 x\| \to \lambda_\rho := \int_{\mathbf{G}} \int_{\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)} \ln \|gx\| \mathrm{d}\rho(g) \mathrm{d}\nu(x) > 0 \quad \rho^{\otimes \mathbb{N}} - \mathrm{ps} \tag{5.1.1}$$

où ν est une mesure stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ (qui est en fait unique dans ce cas-là comme nous le verrons dans la proposition 6.1.5).

Cela montre en particulier la transience de la marche dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Étant donnée une fonction f continue sur $\mathbb{R}^d$, telle que pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \frac{|f(x)|}{\|x\|^\alpha} < +\infty \text{ et } \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)| < +\infty,$$

nous étudions la fonction

$$\left(x \mapsto Gf(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x f(X_n) \right) \tag{5.1.2}$$

La transience de la marche aléatoire et les hypothèses sur f montrent que cette fonction est bien définie et même continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ (la série converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$) et nous voulons en étudier le comportement en 0. Ce comportement est ce que nous appelons le renouvellement, par analogie avec la situation dans $\mathbb{R}$ (voir par exemple [Bla48]).

Guivarc'h et Le Page ont montré dans [GL12] que si T_ρ, le sous-semi-groupe engendré par le support de ρ, stabilise un cône convexe non trivial dans $\mathbb{R}^d$ alors il existe deux mesures de probabilité stationnaires ergodiques ν_1 et ν_2 sur la sphère $\mathbb{S}^{d-1}$ et l'espace des fonctions continues $P-$invariantes est de dimension deux une base en étant donné par deux fonctions p_1, p_2 telles que $p_1 + p_2 = 1$ et $p_i|_{\operatorname{supp} \nu_j} = \delta_{i,j}$ où δ est le symbole de Kronecker ; au contraire, si T_ρ ne stabilise pas de cône de $\mathbb{R}^d$, alors il existe une unique mesure invariante ν_1 sur $\mathbb{S}^{d-1}$ et on note p_1 la fonction constante égale à 1 sur la sphère.

Dans les deux cas, nous définissons un opérateur sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ à décroissance polynomiale à l'infini [2] en notant, pour une telle fonction f et $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\Pi_0 f(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\|x\|}^{+\infty} f(uy) \frac{\mathrm{d}u}{u} \mathrm{d}\nu_i(y) \tag{5.1.3}$$

1. c'est-à-dire que $\int_{\mathbf{G}} |\ln \|g\|| \mathrm{d}\rho(g)$ est finie.
2. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|x\|^\alpha |f(x)|$ est finie.

où, $r \in \{1,2\}$ est le nombre de fermés $T_\rho-$invariants sur la sphère.

Ils ont ensuite montré le

Théorème 5.1 (Guivarc'h - Le Page dans [GL12])**.** *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ dont le support engendre un sous-groupe proximal et fortement irréductible.*

Alors, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ et toute fonction continue f sur $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\sup_{v\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}} \frac{|f(v)|}{\|v\|^\gamma} \text{ et } \sup_{v\in\mathbb{R}^d} \|v\|^\gamma |f(v)| \text{ sont finis}$$

on a que

$$\lim_{x\to 0} \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0 \right) f(x) = 0$$

Où λ_ρ, G et Π_0 sont définis dans les équations (5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3).

Ce théorème montre en particulier que si f est une fonction hölderienne sur $\mathbb{R}^d$, à support compact et telle que $f(0)=0$ alors la fonction $(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0)f$ peut se prolonger en une fonction continue en 0.

Et donc la continuité de Gf en 0 est équivalente à celle de $\Pi_0 f$.

En particulier, dans le cas d'un unique fermé invariant sur la sphère, on a que

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x) = \frac{1}{\lambda_\rho} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(uy) \mathrm{d}\nu(y) \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

et dans le second cas, on a seulement une limite « directionnelle » : pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\lim_{t\to 0^+} \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(tx) = \frac{1}{\lambda_\rho} \sum_{i=1}^{2} p_i \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} f(uy) \mathrm{d}\nu_i(y) \frac{\mathrm{d}u}{u}$$

En particulier, la fonction Gf ne peut pas se prolonger par continuité en 0 en général.

Exemple 5.1.1. Si T_ρ ne contient que des matrices ayant toutes leurs entrées positives, alors il stabilise le cône $\mathcal{C}$ des vecteurs dont toutes les coordonnées sont positives et il stabilise également son opposé $-\mathcal{C}$. Ainsi, en considérant une fonction impaire f qui est régulière et strictement positive sur $\mathcal{C}$, on voit que Gf n'a aucune chance de pouvoir être prolongée par continuité en 0.

Nous voudrions connaître le module de continuité de Gf en 0 et pour cela, nous voulons étudier la vitesse de convergence dans le théorème de renouvellement de Guivarc'h et Le Page. Pour simplifier l'étude, nous allons nous intéresser à

$(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0)f$ ce qui nous permettra de ne pas faire de distinction selon le nombre de fermés $T_\rho-$invariants sur la sphère (et nous verrons dans la proposition 8.3.3 que c'est plus qu'une astuce de calcul). Ainsi nous n'aurons plus qu'à étudier le module de continuité de $\Pi_0 f$ pour connaître celui de Gf et comme nous avons une formule simple à manipuler pour $\Pi_0 f$, il deviendra très facile de trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour que Gf soit prolongeable en une fonction continue en 0 et, le cas échéant, d'en étudier le module de continuité.

Une étude analogue a été faite dans [BDP15] par Buraczewski, Damek et Przebinda ; cependant, leur résultat suppose que T_ρ soit en réalité (conjugué à) un sous-groupe de $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{O}(d)$ et qu'une certaine propriété diophantienne soit réalisée par la projection sur $\mathbb{R}_+$ de la mesure ρ. Ils montrent leur résultat en se ramenant au cas de la dimension 1 (c'est pourquoi ils ont besoin d'une hypothèse diophantienne qui est nécessaire dans ce cas là (voir par exemple [Car83]) ; l'équivalent de cette hypothèse sera toujours vrai pour nous comme nous le verrons dans le chapitre 7).

Notre étude (et celle de Guivarc'h et Le Page) se place dans le cas opposé où le groupe engendré par le support de la mesure ρ contient un élément ayant une valeur propre strictement dominante associée à un espace propre de dimension 1 (c'est notre hypothèse de proximalité).

Plus précisément, nous montrerons le

Théorème 5.2. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Alors, pour tout $\gamma > 0$ assez petit et tout compact K de $\mathbb{R}^d$, il existe $C, \alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{R}^d)$ à support dans K et vérifiant $f(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\left| \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0 \right) f(x) \right| \leqslant \frac{C}{1 + |\ln \|x\||^\alpha} \|f\|_\gamma$$

Où λ_ρ, G et Π_0 sont définis dans les équations (5.1.1), (5.1.2) et (5.1.3).

Dans la première partie de cette thèse, nous avons défini une marche aléatoire sur le tore et nous avons vu que son étude (et notamment la résolution de l'équation de Poisson) faisait intervenir l'étude de la chaîne au voisinage d'une $\Gamma_\rho-$orbite finie $\mathbf{A}$ que nous pouvons identifier à un voisinage de $\{0\} \times \mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$.

C'est pourquoi nous nous intéressons désormais au renouvellement sur le produit de $\mathbb{R}^d$ et d'un $\Gamma_\rho-$ensemble fini $\mathbf{A}$ sur lequel la marche définie par ρ est irréductible et apériodique et nous considérerons des fonctions f hölderiennes sur $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$.

Remarquons que si $Gf(x,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,a)$ admet une limite finie $g(a)$ quand x tend vers 0 alors $(I_d - P)g(a) = f(0,a)$ et donc g est une solution de l'équation de Poisson pour f restreinte à $\mathbf{A}$ (en particulier, on trouve que si $Gf(x,a)$ admet une limite finie en $(0,a)$ alors $\sum_{a\in\mathbf{A}} f(0,a) = 0$).

Remarquons également que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d \times \mathbf{A})$ telle que $\sum_{a\in\mathbf{A}} f(0,a) = 0$ et tout $a \in \mathbf{A}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(0,a)$ est définie puisque la marche aléatoire sur $\mathbf{A}$ est irréductible et apériodique.

Nous modifions un peu l'opérateur Π_0 pour prendre en compte la dépendance en $\mathbf{A}$ et nous notons, pour toute fonction continue sur $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$ à décroissance polynomiale à l'infini [3], tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et tout $a \in \mathbf{A}$,

$$\Pi_0 f(x,a) = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \sum_{a'\in\mathbf{A}} \sum_{i=1}^{r} p_i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_{\|x\|}^{+\infty} f(uy,a') \frac{\mathrm{d}u}{u} \mathrm{d}\nu_i(y) \tag{5.1.4}$$

Remarquons ici que si $\sum_{a\in\mathbf{A}} f(0,a) = 0$ et pour tout $a \in \mathbf{A}$, $f(.,a)$ est hölderienne en 0, alors la limite en 0 de $\Pi_0 f(x,a)$ est bien définie (seulement radialement si $r = 2$).

Nous allons démontrer le

Théorème 5.3. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal Γ_ρ de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.*

Soit $\mathbf{A}$ un $\Gamma_\rho-$ensemble fini non vide tel que la marche aléatoire sur $\mathbf{A}$ définie par ρ est irréductible et apériodique.

Alors, pour tout $\gamma > 0$ assez petit, il existe des constantes $C \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour toute fonction f sur $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$ telle que

$$\|f\|_\gamma := \sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\} \\ x\neq y \\ a\in\mathbf{A}}} (1+\|x\|)^\gamma (1+\|y\|)^\gamma \frac{|f(x,a)-f(y,a)|}{\|x-y\|^\gamma} < +\infty,$$

et telle que pour tout $a \in \mathbf{A}$,

$$\lim_{x\to\infty} f(x,a) = 0 \text{ et } \sum_{a\in\mathbf{A}} f(0,a) = 0$$

Nous avons que pour tout $a \in \mathbf{A}$,

$$\lim_{x\to 0} \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho}\Pi_0\right) f(x,a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(0,a)$$

3. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\sup_{(x,a)\in\mathbb{R}^d\times\mathbf{A}} \|x\|^\alpha |f(x)|$ est fini

Par ailleurs, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et tout $a \in \mathbf{A}$,

$$\left| \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho} \Pi_0 \right) f(x,a) - \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho} \Pi_0 \right) f(y,a) \right| \leqslant C \omega_0(x,y)^\alpha \|f\|_\gamma$$

où Π_0 est l'opérateur défini dans l'équation (5.1.4) et nous avons noté, pour $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\omega_0(x,y) = \frac{\sqrt{|\ln \|x\| - \ln \|y\||^2 + \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\|^2}}{(1 + |\ln \|x\||)(1 + |\ln \|y\||)}$$

Remarque 5.4. La définition de la fonction ω_0 peut paraître étrange mais nous verrons que c'est une sorte de distance conique sur $\mathbb{R}^d$: on écrase le voisinage de 0 et le voisinage de l'infini. Le lecteur peut se référer au paragraphe 8.4 pour plus de détails.

Remarque 5.5. L'hypothèse sur f est que $\lim_\infty f(.,a) = 0$ et qu'il existe une constante C telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^d$ et tout $a \in \mathbf{A}$,

$$|f(x,a) - f(y,a)| \leqslant C \left(\frac{\|x - y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} \right)^\gamma$$

en particulier, les fonctions hölderiennes à support compact sur $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$ vérifient cette condition. Par ailleurs, en faisant tendre y vers l'infini, cette équation implique que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|f(x)| \leqslant \frac{C}{(1 + \|x\|)^\gamma}$$

Et donc ces fonctions décroissent polynomialement à l'infini.

Nous ne nous intéressons pas seulement à des fonctions à support compact car la condition que nous avons imposée sur f deviendra très naturelle après avoir identifié $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$ dans le chapitre 8.

Remarque 5.6. Comme dit précédemment, ce qui nous intéresse, c'est surtout la continuité de la fonction Gf mais il est facile d'étudier celle de $\Pi_0 f$ et d'en évaluer un module de continuité.

Pour démontrer ce théorème, nous étudierons la famille analytique d'opérateurs (voir le chapitre 8) sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A})$ définie pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|\Re(z)|$ assez petit, une fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A})$ et un point (x,a) de $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A}$ par

$$P(z) f(x,a) = \int_{\mathbf{G}} e^{-z \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}} f(gx, ga) \mathrm{d}\rho(g)$$

En effet, nous verrons dans le chapitre 8 que la vitesse dans le théorème de renouvellement est liée au contrôle de $(I_d - P(z))^{-1}$ sur l'axe des imaginaires purs.

Pour obtenir un contrôle de $\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbf{A})}$ quand t est grand, nous reprenons dans le chapitre 6 la méthode développée par Dolgopyat dans [Dol98] pour les opérateurs de Ruelle et nous montrons la proposition 6.2.1 qui lie $\|(I_d - P(it))^{-1}\|$ aux propriétés diophantiennes des logarithmes des rayons spectraux des éléments de Γ_ρ.

Ensuite, nous montrerons que dans un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, on peut construire des éléments pour lesquels le logarithme du rayon spectral a de bonnes propriétés diophantiennes. Ce sera l'objet du chapitre 7 et plus particulièrement du théorème 7.3.7.

5.2 Application à la résolution de l'équation de Poisson

> Dans cette section, nous retournons à l'étude de la marche sur le tore en montrant que l'on peut « localement » résoudre l'équation de Poisson. C'est ce type de résultat qui a motivé notre étude de la vitesse dans le théorème de renouvellement.

Dans l'étude de la marche sur le tore (ou plus exactement de la résolution de l'équation de Poisson) une question naturelle est : l'image de $I_d - P$ est-elle fermée dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d)$? Où même a-t-on seulement que

$$\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{T}^d) \cap \overline{(I_d - P)\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d)} \subset (I_d - P)\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d)\,?$$

Savoir cela nous permettrait de démontrer le théorème central limite, la loi du logarithme itéré et l'inégalité des grandes déviations pour toute fonction d'intégrale nulle contre toutes les mesures invariantes puisque ces fonctions sont précisément l'adhérence de l'image de $I_d - P$ (voir notamment la proposition 1.1 du paragraphe 5.1 de [Kre85]).

Nous ne savons pas répondre à cette question, mais nous allons montrer dans la proposition suivante que pour des parties fermées $\mathbf{Y}$ bien choisies, on a que

$$\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{T}^d) \cap \overline{(I_d - P)\mathcal{C}^0(\mathbf{Y})} \subset (I_d - P)\mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d)$$

où nous avons noté $\mathcal{C}^0(\mathbf{Y})$ l'ensemble des fonctions continues sur le tore dont le support est inclut dans l'ensemble $\mathbf{Y}$.

Proposition 5.2.1. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$ dont le support est fini et engendre un groupe Γ_ρ fortement irréductible et proximal.*

On note T_ρ le sous-semi-groupe engendré par le support de ρ.

Alors, pour toute $\Gamma_\rho-$orbite finie $\mathbf{A}$ du tore, il existe $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, en notant $B(\mathbf{A},\varepsilon)$ le $\varepsilon-$voisinage de $\mathbf{A}$ dans le tore, on a que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X}) \cap \overline{(I_d - P)\mathcal{C}^0(B(\mathbf{A},\varepsilon))}$, il existe une fonction bornée $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d \setminus \mathbf{A})$ telle que $f = g - Pg$ sur $\mathbb{T}^d \setminus \mathbf{A}$.

De plus, si T_ρ ne stabilise pas de cône convexe strict dans $\mathbb{R}^d$, alors la fonction g peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{T}^d$ et si non, il existe une fonction f hölderienne et d'intégrale nulle contre toutes les mesures stationnaires et telle que l'équation de Poisson admet une solution g définie sur $\mathbb{T}^d \setminus \mathbf{A}$ qui ne peut pas se prolonger par continuité à $\mathbb{T}^d$.

La preuve de ce théorème vient de ce que pour de telles fonctions, nous avons une formule donnant la fonction g (voir la proposition 2.1.5 et la remarque 2.1.7) et que la régularité de cette solution de l'équation de Poisson peut être étudiée avec le théorème de renouvellement.

Démonstration. Soit ε tel que si τ est le temps de retour dans le complémentaire du $\varepsilon-$voisinage de $\mathbf{A}$, alors

$$\mathbb{E}_x e^{\alpha\tau} \text{ est finie sur } \mathbb{T}^d \setminus \mathbf{A} \text{ et } \sup_{x\in\mathbb{T}^d, d(x,\mathbf{A})\geqslant\varepsilon} \mathbb{E}_x e^{\alpha\tau} \text{ est fini}$$

Un tel ε existe d'après la proposition 6.3 de [BQ11] (on prend ici pour u la fonction u_Q définie dans la preuve du lemme 4.2.3 où Q est tel que $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}_Q$). Par ailleurs, on peut toujours supposer que

$$\varepsilon \sup_{g\in\operatorname{supp}\rho} \|g\| \leqslant \inf_{a,b\in\mathbf{A}, a\neq b} d(a,b) - 2\varepsilon$$

(Cela permet de voir que si x est dans le $\varepsilon-$voisinage de $a \in \mathbf{A}$, alors pour tout $g \in \operatorname{supp}\rho$, gx n'est pas dans le $\varepsilon-$voisinage de a' pour un $a' \neq a$).

Soit s une fonction régulière sur le tore telle que pour tout $x \in \mathbb{T}^d$,

$$\mathbb{1}_{B(\mathbf{A},\varepsilon/2)} \leqslant s(x) \leqslant \mathbb{1}_{B(\mathbf{A},\varepsilon)}$$

et $s(x)$ ne dépend que de la distance de x à $\mathbf{A}$.

Et on note, pour $x \in \mathbb{T}^d$,

$$R_s f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (PM_s)^n(f)(x), \quad S_s f(x) = PM_{1-s} f(x) \text{ et } Q_s = R_s S_s$$

où, M_s (resp. M_{1-s}) est l'opérateur de multiplication par s (resp. $1-s$). Nous renvoyons les lecteurs aux équations (2.1.3), (2.1.4), et (2.1.5) ainsi qu'à la proposition 2.1.5 pour des justifications de ces définitions. Il faut voir que la fonction s ne sert qu'à éviter de multiplier par la fonction indicatrice du $\varepsilon-$voisinage de $\mathbf{A}$ (et donc utiliser la définition usuelle avec le temps de retour τ) pour que nos opérateurs préservent les fonctions hölderiennes.

Ces opérateurs sont bien définis puisque pour toute fonction continue f sur le tore,

$$|R_s f(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}_x |f(X_n)| \mathbb{1}_{B(\mathbf{A},\varepsilon)}(X_1) \dots \mathbb{1}_{B(\mathbf{A},\varepsilon)}(X_n) \leqslant \|f\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}_x(\tau \geqslant n)$$

Alors, nous affirmons que $R_s f$ est solution de l'équation de Poisson et qu'elle vérifie les hypothèses de continuité du théorème.

Premièrement,

$$(I_d - P)R_s f = (I_d - PM_s - PM_{1-s})R_s f = f - S_s R_s f$$

et, par hypothèse, il existe une suite $(g_n) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}^d)^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n, $\operatorname{supp} g_n \subset B(\mathbf{A}, \varepsilon)$ et $g_n - Pg_n$ converge uniformément vers f.

Ainsi,

$$S_s R_s f = \lim_n S_s R_s (I_d - P) g_n = \lim_n S_s (I_d - Q_s) g_n = 0$$

Où la dernière inégalité vient de ce que, par définition, pour toute fonction g avec $\operatorname{supp} g \subset B(\mathbf{A}, \varepsilon)$, $S_s g = Q_s g = 0$.

Cela montre que la fonction $R_s f$ est bien solution de l'équation de Poisson.

Par ailleurs, $R_s f$ est continue sur $\mathbb{T}^d \setminus \mathbf{A}$ puisque la série qui la définit converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{T}^d \setminus \mathbf{A}$ et il ne nous reste donc plus qu'à en étudier la continuité en $\mathbf{A}$.

Pour cela, nous identifions le $\varepsilon-$voisinage de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{T}^d$ avec le $\varepsilon-$voisinage de $\{0\} \times \mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$, nous identifions la restriction de f à $B(\mathbf{A}, \varepsilon)$ à une fonction hölderienne sur $B(0, \varepsilon) \times \mathbf{A}$ que nous prolongeons en une fonction hölderienne à support compact dans $\mathbb{R}^d$ et nous notons $\tilde{s}$ la fonction (ne dépendant que de $\|x\|$) image de le fonction s par cette identification.

Nous notons $\tilde{P}$ l'opérateur de Markov associé à la marche aléatoire définie par ρ dans $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$ et $\tilde{R}_{\tilde{s}}, \tilde{S}_{\tilde{s}}$ les opérateurs définis comme R_s, S_s.

Alors, pour tout $x \in B(0, \varepsilon)$ et tout $a \in \mathbf{A}$,

$$R_s f(x + a) = \tilde{R}_{\tilde{s}} \tilde{f}(x, a)$$

Ainsi, nous voudrions applique le théorème de renouvellement pour étudier la continuité de $R_{\tilde{s}} f$ en $(0, a)$. Pour cela, remarquons que

$$\tilde{R}_{\tilde{s}} \tilde{f} = \sum_{n=0}^{+\infty} \tilde{P}^n (I_d - \tilde{S}_{\tilde{s}} \tilde{R}_{\tilde{s}}) \tilde{f}$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{R}_{\tilde{s}} - \tilde{P}^n \tilde{R}_{\tilde{s}} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}^k (I_d - P) \tilde{R}_{\tilde{s}} = \sum_{k=0}^{n-1} P^k (I_d - \tilde{S}_{\tilde{s}} \tilde{R}_{\tilde{s}})$$

et $R_s f$ est continue sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\} \times \mathbf{A}$ et à support compact (puisque ρ est à support fini et donc pour tout x dont la norme est assez grande, $\mathbb{P}_x(\tau = 1) = 1$) donc $\lim_n \tilde{P}^n \tilde{R}_{\tilde{s}} f = 0$ (puisque la marche est transiente sur $\mathbb{R}^d \times \mathbf{A}$).

Remarquons également que puisque $\mathbf{A}$ est une $\Gamma_\rho-$orbite finie, la mesure équidistribuée sur $\mathbf{A}$ est $P-$invariante et donc,

$$\sum_{a\in\mathbf{A}} \tilde{f}(0,a) = \sum_{a\in\mathbf{A}} f(a) = 0$$

Enfin, la fonction $\tilde{R}_{\tilde{s}}\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\times\mathbf{A}$. En développant $\tilde{S}_{\tilde{s}}\tilde{R}_{\tilde{s}}\tilde{f}$, en utilisant que ρ est à support compact, que $\tilde{f}$ est $\tilde{s}$ sont hölderiennes et que le temps de retour dans le complémentaire de $B(0,\varepsilon)\times\mathbf{A}$ a un moment exponentiel, on peut montrer que la fonction $\tilde{S}_{\tilde{s}}\tilde{R}_{\tilde{s}}\tilde{f}$ est hölderienne à support compact dans $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\times\mathbf{A}$. On peut donc appliquer le théorème de renouvellement 5.3 à la fonction $\tilde{f}-\tilde{S}_{\tilde{s}}\tilde{R}_{\tilde{s}}\tilde{f}$ et cela termine la preuve de la première partie de la proposition : la fonction R_sf est bornée et si $\operatorname{supp}\rho$ ne stabilise pas de cône convexe strict de $\mathbb{R}^d$, elle peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{T}^d$.

Au contraire, si T_ρ stabilise un cône convexe dans $\mathbb{R}^d$, on note

$$g(x) = p_1\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\sigma(\|x\|)$$

où p_1 est une fonction hölderienne $P-$invariante et non constante sur la sphère (et donc g ne peut pas se prolonger par continuité en 0). Et alors, en utilisant que $Pp_1 = p_1$, on a que

$$g(x) - Pg(x) = \int_{\mathbf{G}} p_1\left(\gamma\frac{x}{\|x\|}\right)(\sigma(\|x\|)-\sigma(\|\gamma x\|))\,\mathrm{d}\rho(\gamma)$$

et la fonction $g-Pg$ peut donc se prolonger en une fonction hölderienne sur $\mathbb{R}^d$ à support dans un petit voisinage de 0, on peut donc la faire passer en une fonction hölderienne sur le tore d'intégrale nulle contre toutes les mesures invariantes et telle que l'équation de Poisson n'a pas de solution continue. □

5.3 Démonstrations

Dans ce paragraphe, nous démontrons les résultats énoncés précédemment à partir de ceux démontrés dans des cadres plus généraux dans les chapitres suivants.

Démonstration du théorème 5.2 à partir de 5.3.
Soit $\gamma\in]0,1]$ et K un compact de $\mathbb{R}^d$. Alors, il existe une constante C_0 telle que pour toute fonction f, $\gamma-$hölderienne sur $\mathbb{R}^d$ et à support dans K,

$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}\\ x\neq y}} (1+\|x\|)^\gamma(1+\|y\|)^\gamma\frac{|f(x)-f(y)|}{\|x-y\|^\gamma} \leqslant C_0\|f\|_\gamma$$

On peut donc appliquer le théorème 5.3 pour trouver des constantes C, α telles que pour toute fonction f, $\gamma-$hölderienne et à support dans K et tout $x, y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\left| \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho} \Pi_0 \right) f(x) - \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho} \Pi_0 \right) f(y) \right| \leqslant C \|f\|_\gamma \omega_0(x,y)^\alpha$$

et

$$\lim_{y \to 0} \left(G - \frac{1}{\lambda_\rho} \Pi_0 \right) f(y) = 0$$

Or, nous avons également que

$$\lim_{y \to 0} \omega_0(x,y) = \frac{1}{1 + |\ln \|x\||}$$

ce qui montre le théorème 5.2. □

Démonstration du théorème 5.3.

Ce théorème est une application directe du théorème 8.1.1.

En effet, en notant $\mathbf{X} = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{H} = \{I_d, \vartheta\}$ où ϑ est l'application antipodale sur la sphère et identité sur $\mathbf{A}$, on a que $\mathbf{H}$ agit par isométries sur $\mathbf{X} \times \mathbf{A}$ et $(\mathbf{X} \times \mathbf{A})/\mathbf{H}$, que l'on identifie au produit cartésien de l'espace projectif et de $\mathbf{A}$ est bien $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus de $\mathbf{A}$ (voir l'exemple 6.1.4). De plus, dans le chapitre 7, nous avons vu que le cocycle σ défini sur $\mathbf{G} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ par $\sigma(g, X) = \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}$ pour $x \in \mathbf{X} \setminus \{0\}$ était également dans $\mathcal{Z}^M(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ et le résultat de Furstenberg mentionné plus tôt dans l'introduction de cette partie montre que $\sigma_\rho > 0$.

Par ailleurs, nous avons vu dans le théorème 7.1 que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ il existe des constantes C, L telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant t_0$,

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\| \leqslant C|t|^L$$

Cela montre donc que l'on peut effectivement appliquer le théorème 8.1.1 à toute fonction f vérifiant les hypothèses du théorème puisqu'une telle fonction s'identifie à une fonction $\tilde{f}$ de $\mathcal{C}_\omega^\gamma(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$ telle que $\sum_{a \in \mathcal{A}} \lim_{x \to -\infty} \tilde{f}(x, a) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \tilde{f}(x, a) = 0$ grâce à l'application $(x, t) \mapsto e^t x$ de $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. □

Chapitre 6

Perturbations unitaires des opérateurs de Markov

Résumé

Dans ce chapitre, nous étudions la perturbation des opérateurs de Markov issus d'actions de groupes par des noyaux de module 1 donnés par des cocycles. Le but étant de démontrer la proposition 6.2.1 qui montre que si l'opérateur perturbé a une valeur propre proche de 1, alors le cocycle est proche d'un cobord.

Sommaire

Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbb{R}$ ayant un moment exponentiel et une dérive $\lambda = \int_{\mathbb{R}} y \mathrm{d}\rho(y) > 0$.

Dans [Car83], Carlsson a montré que la vitesse du renouvellement était liée au problème de trouver une constante $l \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\liminf_{t\to\pm\infty} |t|^l \left| 1 - \int_{\mathbb{R}} e^{ity} \mathrm{d}\rho(y) \right| > 0.$$

Cette condition est liée aux propriétés diophantiennes des points $\rho-$génériques (voir par exemple [Bre05] où une hypothèse un peu plus forte mais du même type est étudiée).

Notamment, si un tel paramètre existe, alors la vitesse dans le théorème de renouvellement est polynomiale. Si on peut même prendre $l = 0$ (ce qui est notamment le cas, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue, quand la mesure ρ est étalée [1]), alors on peut même avoir une vitesse exponentielle (cf. [BG07]).

Dans ce chapitre, nous avons un groupe $\mathbf{G}$ agissant continûment sur un espace métrique compact $(\mathbf{X}, d)$, une fonction $\sigma : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ (qui sera en fait un cocycle) et nous étudions la famille d'opérateurs $P(it)$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$ et tout $x \in \mathbf{X}$ par

$$P(it)f(x) = \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx)\mathrm{d}\rho(g)$$

Ce qui correspond à la propriété diophantienne pour les mesures sur $\mathbb{R}$ est donc l'existence d'un $l \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\limsup_{t \to \pm\infty} \frac{1}{|t|^l} \|(I_d - P(it))^{-1}\| \text{ est finie.}$$

Où la norme est prise dans un certain espace de Banach (qui pour nous sera un espace de fonctions hölderiennes).

Pour cela, nous adaptons un résultat de Dolgopyat démontré dans [Dol98] pour les opérateurs de Ruelle. C'est l'objet de la proposition 6.2.1 qui est le but de ce chapitre.

Le groupe $\mathbf{G}$ sera toujours un localement compact et dénombrable à l'infini. De plus, nous le ferons agir sur un espace métrique compact $(\mathbf{X}, d)$.

Pour une mesure borélienne de probabilité ρ sur $\mathbf{G}$ nous noterons P (ou parfois P_ρ pour insister sur la mesure ρ) l'opérateur de Markov sur $\mathbf{X}$ associé à ρ. C'est l'opérateur défini, pour toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$ et tout x de $\mathbf{X}$, par

$$Pf(x) = \int_{\mathbf{G}} f(gx)\mathrm{d}\rho(g)$$

Si $\mathbf{G}$ agit continûment sur $\mathbf{X}$, on voit, en utilisant le théorème de convergence dominée, que cet opérateur préserve l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{X}$.

6.1 Préliminaires

Afin de pouvoir énoncer prorement la proposition 6.2.1, nous introduisons dans cette section plusieurs notions techniques.

1. Une des puissances de convolution de ρ n'est pas singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

6.1.1 Actions contractantes

On suppose que l'ensemble $\mathbf{X}$ fibre de manière $\mathbf{G}-$équivariante au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$. C'est à dire que l'on a une application continue $\pi_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ qui est $\mathbf{G}-$équivariante : pour tout x de $\mathbf{X}$ et tout g de $\mathbf{G}$,

$$\pi_{\mathbf{A}}(gx) = g\pi_{\mathbf{A}}(x)$$

Définition 6.1.1 (Action contractante)**.** Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact, dénombrable à l'infini, $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$ et soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact muni d'une action continue de $\mathbf{G}$.

On suppose que $\mathbf{X}$ fibre de manière $\mathbf{G}-$équivariante au dessus du $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$.

Soient ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$ et $\gamma, M \in \mathbb{R}_+^\star$.

On dit que $\mathbf{X}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus de $\mathbf{A}$ si

1. Pour tout $g \in \mathbf{G}$ et tout $x, y \in \mathbf{X}$,
$$d(gx, gy) \leqslant MN(g)^M d(x, y) \tag{6.1.1}$$
2. $$\int_G N(g)^{M\gamma} \mathrm{d}\rho(g) \text{ est finie} \tag{6.1.2}$$
3. pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ on a
$$\sup_{\substack{x,y\in\mathbf{X} \\ x\neq y \\ \pi_{\mathbf{A}}(x)=\pi_{\mathbf{A}}(y)}} \int_{\mathbf{G}} \frac{d(gx, gy)^\gamma}{d(x, y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{\star n_0}(g) < 1$$
où $\pi_{\mathbf{A}} : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ est la projection $\mathbf{G}-$équivariante.

Remarque 6.1.2. Si $\mathbf{X}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus de $\mathbf{A}$, alors P préserve l'espace $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ des fonctions $\gamma-$Holdëriennes sur $\mathbf{X}$.

Remarque 6.1.3. Cette notion est utilisée par exemple par Bougerol et Lacroix dans [BL85] pour étudier les marches aléatoires sur l'espace projectif mais la définition que l'on a donnée, avec cette généralité, est tirée de [BQ15] auquel le lecteur peut se référer pour plus de détails.

Nous aurions pu définir $N(g)$ comme étant le maximum de $d(gx, gy)/d(x, y)$ (en supposant que ce maximum est toujours fini) car cela définit bien une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$; cependant, dans les applications, il y a une fonction naturelle N associée à $\mathbf{G}$.

Exemple 6.1.4. Notre principal exemple sera le cas où $\mathbf{G}$ est un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, ρ est une mesure de probabilité sur

$\mathbf{G}$ qui a un moment exponentiel et dont le support engendre $\mathbf{G}$ et $\mathbf{X}$ est le produit cartésien de l'espace projectif $\mathbb{P}^d(\mathbb{R})$ (qui est contracté d'après le théorème 2.3 du chapitre V de [BL85]) et d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$ muni de la distance discrète (pour tous $s, s' \in \mathbf{A}$, $d(s, s') = 0$ si $s = s'$ et 1 sinon).

Remarquons que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sup_{\substack{x,y\in\mathbf{X} \\ x\neq y \\ \pi_{\mathbf{A}}(x)=\pi_{\mathbf{A}}(y)}} \int_{\mathbf{G}} \frac{d(gx,gy)^\gamma}{d(x,y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{\star n}(g)$$

étant sous-multiplicative, si $\mathbf{X}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus de $\mathbf{A}$, alors il existe des constantes $C_1, \delta \in \mathbb{R}_+^\star$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous les $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)$,

$$\int_{\mathbf{G}} d(gx,gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \leqslant C_1 e^{-\delta n} d(x,y)^\gamma \tag{6.1.3}$$

Remarquons par ailleurs que si $\gamma' \in]0, \gamma]$ alors la fonction $t \mapsto t^{\gamma'/\gamma}$ est concave sur $[0, \mathrm{Diam}(\mathbf{X})]$ et donc si l'espace $\mathbf{X}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté, il est aussi $(\rho, \gamma', M, N)-$contracté.

Soit $\mathbf{X}$ un espace métrique compact et P un opérateur positif sur $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$. L'opérateur P est dit *équicontinu* si il est à puissances bornées et si pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$, la suite $(P^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est équicontinue. Le lecteur peut se référer à [Rau92] pour un rappel de propriétés des opérateurs équicontinus que nous allons utiliser ici.

Proposition 6.1.5. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact dénombrable à l'infini, $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$ et soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.*

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact muni d'une action continue de $\mathbf{G}$ qui est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$.

Alors, l'opérateur de Markov P associé à ρ est équicontinu dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$.

De plus, si la marche aléatoire définie par ρ sur $\mathbf{A}$ est irréductible et apériodique, alors il existe une unique mesure de probabilité ν sur $\mathbf{X}$ qui soit $P_\rho-$invariante. Et 1 est l'unique valeur propre de P de module 1, l'espace propre associé étant une droite.

Avant de démontrer ce théorème, nous rappelons un résultat sur les chaînes de Markov données par l'action d'un groupe sur un ensemble fini.

Lemme 6.1.6. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe topologique agissant sur un ensemble fini $\mathbf{A}$ et soit ρ une mesure borélienne sur $\mathbf{G}$ telle que la marche aléatoire sur $\mathbf{A}$ définie par ρ est irréductible et apériodique.*

Alors, $\nu_{\mathbf{A}}$, la mesure équidistribuée sur $\mathbf{A}$, est l'unique mesure $P_\rho-$stationnaire et l'opérateur P_ρ a un rayon spectral strictement plus petit que 1 dans l'orthogonal des fonctions constantes dans $\mathrm{L}^2(\mathbf{A},\nu_{\mathbf{A}})$.

Démonstration. D'après la théorie des chaînes de Markov à espaces d'états finis (ou en d'autres termes, le théorème de Perron-Frobénius), il suffit de remarquer que la mesure $\nu_{\mathbf{A}}$ est stationnaire. □

Démonstration de la proposition 6.1.5. L'équicontinuité de P dans l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ se prouve comme dans le cas d'un sous groupe de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ agissant sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ traité dans [BQ14]. Nous la montrerons en détail dans la preuve de la proposition 6.1.12 où l'espace est seulement localement contracté.

Soit désormais une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et un complexe de module un $\lambda \in \mathbb{U}$ tel que $Pf = \lambda f$.

Pour tout $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)$,

$$\lambda^n(f(x) - f(y)) = P^n f(x) - P^n f(y) = \int_{\mathbf{G}} f(gx) - f(gy)\mathrm{d}\rho^{\star n}(g)$$

Mais l'espace est contracté au dessus de $\mathbf{A}$ et $|\lambda| = 1$ et donc, on obtient que pour tout $x, y \in \mathbf{X}$ avec $\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)$, $f(x) = f(y)$. Donc les vecteurs propres de P dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ associés à des valeurs propres de module 1 s'identifient à des fonctions sur $\mathbf{A}$ mais comme comme nous avons supposé que la chaîne de Markov définie par ρ sur $\mathbf{A}$ est irréductible et apériodique, nous avons que les vecteurs propres associés à des valeurs propres de module 1 de P dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ sont des fonctions constantes (cf le lemme 6.1.6). En utilisant les propositions 3.2 et 3.3 de Raugi dans [Rau92], cela montre que la mesure ν est unique, que 1 est une valeur propre simple et qu'il n'y a pas d'autre valeur propre de module 1. □

Nous pouvons à présent étendre à notre contexte le théorème 2.5 du chapitre V du livre de Bougerol et Lacroix [BL85] qui montre que quand l'espace est contracté, l'opérateur a un trou spectral dans l'espace des fonctions hölderiennes d'intégrale nulle contre la mesure stationnaire. C'est l'objet de la

Proposition 6.1.7. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact dénombrable à l'infini, $N : \mathbf{G} \to [1,+\infty[$ une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$ et soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.*

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact muni d'une action continue de $\mathbf{G}$ qui est $(\rho,\gamma,M,N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$ sur lequel la marche aléatoire définie par ρ est irréductible et apériodique.

On note $e^{-\kappa_{\mathbf{A}}} \in]0,1[$ et $C_{\mathbf{A}} \in [1,+\infty[$ tels que pour toute fonction f sur $\mathbf{A}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| P^n f - \int f \mathrm{d}\nu_{\mathbf{A}} \right\|_\infty \leqslant C_{\mathbf{A}} e^{-\kappa_{\mathbf{A}} n} \|f\|_\infty$$

où $\nu_{\mathbf{A}}$ est la mesure équidistribuée sur $\mathbf{A}$ (voir le lemme 6.1.6 pour l'existence de $\kappa_{\mathbf{A}}, C_{\mathbf{A}}$).

Soit ν l'unique mesure de probabilité $P_\rho-$invariante sur $\mathbf{X}$ (donnée par la proposition 6.1.5).

Alors il existe des constantes $\kappa, C_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ ne dépendant pas de $C_{\mathbf{A}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\| P_\rho^n - \Pi_\nu \right\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})} \leqslant C_0 C_{\mathbf{A}} e^{-\kappa n}$$

où nous avons noté Π_ν l'opérateur d'intégration contre la mesure ν.

Remarque 6.1.8. On quantifie l'hypothèse de trou spectral dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{A}, \nu_{\mathbf{A}})$ puisque l'on se laisse la possibilité d'étudier une famille $(\mathbf{A}_i, \nu_i)$ de $\mathbf{G}-$ensembles finis sur lesquels P a un trou spectral uniforme.

Remarque 6.1.9. Cette proposition peut être vue comme un corollaire de la quasi-compacité de P dans $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ que nous montrerons dans la proposition 6.1.12 et du fait que, dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$, 1 est la seule valeur propre de module 1 et son espace propre associé est l'ensemble des fonctions constantes sur $\mathbf{X}$. Cependant, une fois encore, ce qui est intéressant dans cette énoncé, c'est la dépendance entre le trou spectral dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbf{A}, \nu_{\mathbf{A}})$ et celui dans $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$.

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut calculer

$$|P^n f(x) - P^n f(y)| \leqslant m_\gamma(f) \int_{\mathbf{G}} d(gx, gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \leqslant m_\gamma(f) C_1 e^{-\delta n} d(x,y)^\gamma$$

où on a noté C_1, δ les constantes données par l'equation (6.1.3).

Cela montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$m_\gamma(P^n f) \leqslant C_1 e^{-\delta n} m_\gamma(f)$$

On rappelle que l'on a noté ν l'unique mesure de probabilité $P-$invariant sur $\mathbf{X}$ (donnée par la proposition 6.1.5).

De plus pour tout $x \in \mathbf{X}$ et tout entier n non nul, on note ν_x la mesure définie par

$$\int \varphi(y) \mathrm{d}\nu_x(y) = |\mathbf{A}| \int_{\mathbf{X}} \mathbb{1}_{\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)} \varphi(y) \mathrm{d}\nu(y)$$

et aussi pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$f_1^n(x) = \int_{\mathbf{X}} P^n f(y) \mathrm{d}\nu_x(y) \text{ et } f_2^n(x) = P^n f(x) - f_1^n(x)$$

Alors, pour tout $x, y \in \mathbf{X}$,

$$f_2^n(y) - m_\gamma(f_2^n)\mathrm{Diam}(\mathbf{X}) \leqslant f_2^n(x) \leqslant f_2^n(y) + m_\gamma(f_2^n)\mathrm{Diam}(\mathbf{X})$$

où nous avons noté $\mathrm{Diam}(\mathbf{X})$ le diamètre de $\mathbf{X}$.

Alors, en intégrant par rapport à y et en utilisant que $\int_{\mathbf{X}} f_2^n(y)\mathrm{d}\nu_x(y) = 0$, on obtient que

$$\|f_2^n\|_\infty \leqslant \mathrm{Diam}(\mathbf{X})^\gamma m_\gamma(f_2^n) = \mathrm{Diam}(\mathbf{X})^\gamma m_\gamma(P^n f)$$

et comme,

$$P^{2n}f(x) = P^n(P^n f)(x) = P^n(f_2^n + f_1^n)(x) = P^n f_2^n(x) + P^n f_1^n(x)$$

on a les inégalités

$$\begin{aligned}\left|P^{2n}f(x) - \int_{\mathbf{A}} f_1^n(a)\mathrm{d}\nu_{\mathbf{A}}(a)\right| &\leqslant \|f_2^n\|_\infty + \left|P^n f_1^n(x) - \int_{\mathbf{A}} f_1^n(a)\mathrm{d}\nu_{\mathbf{A}}(a)\right| \\ &\leqslant \mathrm{Diam}(\mathbf{X})^\gamma C_1 e^{-\delta n} m_\gamma(f) + C_{\mathbf{A}} e^{-\kappa_{\mathbf{A}} n}\|P^n f_1^n\|_\infty \\ &\leqslant \left(\mathrm{Diam}(\mathbf{X})^\gamma C_1 e^{-\delta n} + C_{\mathbf{A}} e^{-\kappa_{\mathbf{A}} n}\right)\|f\|_\gamma\end{aligned}$$

Et finalement, d'après le théorème de Fubini,

$$\int_{\mathbf{A}} f_1^n(a)\mathrm{d}\nu_{\mathbf{A}}(a) = \int_{\mathbf{X}} f(y)\mathrm{d}\nu(y)$$

Cette dernière égalité termine la preuve du lemme puisqu'on a aussi que

$$m_\gamma(P^n f) \leqslant C_1 e^{-\delta n} m_\gamma(f)$$

Et donc,

$$\left\|P^{2n}f - \int f\mathrm{d}\nu\right\|_\gamma \leqslant \left(CC_1 e^{-\delta n} + C_1 e^{-2\delta n} + C_{\mathbf{A}} e^{-\kappa_{\mathbf{A}} n}\right)\|f\|_\gamma$$

on note donc $\kappa = \frac{1}{2}\min(\delta, \kappa_{\mathbf{A}})$ et $C_0 = (1+C)C_1 + 1$. □

6.1.2 Actions fibrant au dessus d'une action contractante

Dans ce paragraphe, nous étudions le cas où l'espace est seulement localement contracté et nous essayons de retrouver les résultats du paragraphe précédent.

Pour étudier l'action de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ sur la sphère et non pas seulement sur l'espace projectif, la notion de contractivité ne suffit plus (puisque la sphère n'est pas contractée vu que les points x et $-x$ restent à distance fixe). C'est cependant la seule obstruction puisque l'involution θ de la sphère qui envoie tout point x sur $-x$ commute à l'action de $\mathbf{G}$ et donc, en notant $\mathbf{H} = \{I_d, \theta\}$, on a l'identification $\mathbb{S}^{d-1}/\mathbf{H} \sim \mathbb{P}^d$ et l'espace projectif, lui, est bien $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté (si ρ a un moment exponentiel et $\mathrm{supp}\,\rho$ engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$) comme on l'a déjà noté dans l'exemple 6.1.4.

C'est pourquoi, on considérera plutôt un $\mathbf{G}-$espace métrique compact $\mathbf{X}$ sur lequel agit un groupe fini $\mathbf{H}$ dont l'action commute à celle de $\mathbf{G}$ et tel que le quotient (muni de la métrique quotient) est contracté. Mais le lecteur peut toujours penser que $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, $\mathbf{X} = \mathbb{S}^{d-1}$, $\mathbf{H} = \{I_d, \theta\}$ et $\mathbf{X}/\mathbf{H} = \mathbb{P}^d$.

Notre première étape est de retrouver l'équivalent du lemme 6.1.5 et de la proposition 6.1.7.

Pour cela, nous utiliserons le

Théorème 6.1.10 (Ionescu-Tulcea et Marinescu [ITM50])**.** *Soit $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|_{\mathcal{B}})$ un espace de Banach et P un opérateur continu sur $\mathcal{B}$.*

Si il existe une norme $\|\,.\,\|$ sur $\mathcal{B}$ telle que l'application identité entre les espaces $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|_{\mathcal{B}})$ et $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|)$ est compacte et deux constantes $r, R \in \mathbb{R}_+$ telles que pour tout vecteur $f \in \mathcal{B}$,

$$\|Pf\|_{\mathcal{B}} \leqslant r\|f\|_{\mathcal{B}} + R\|f\|$$

Alors, le rayon spectral essentiel de P dans $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|_{\mathcal{B}})$ est majoré par r.

Exemple 6.1.11. Dans nos exemples, $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|_{\mathcal{B}})$ sera un espace des fonctions hölderiennes muni de sa norme d'espace de Banach et $\|\,.\,\|$ sera la norme uniforme.

Proposition 6.1.12. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact dénombrable à l'infini, $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$ et soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.*

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact muni d'une action continue de $\mathbf{G}$ et d'une autre action d'un groupe fini $\mathbf{H}$ qui commute à celle de $\mathbf{G}$ et telle que $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$.

Alors, il existe $C', \delta' \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$m_\gamma(P^n f) \leqslant C' \left(e^{-\delta' n} m_\gamma(f) + \|f\|_\infty \right)$$

En particulier, P est équicontinu sur $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et le rayon spectral essentiel de P dans $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ est strictement inférieur à 1.

Démonstration. Nous ne démontrons pas cette proposition ici, une preuve en sera apportée dans un cadre plus général (l'opérateur P étant notamment perturbé par un cocycle) dans le lemme 8.2.4. □

Finalement, nous étudions les valeurs propres de module 1 de P dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$. Pour cela, nous commençons par étudier les mesures $P-$invariantes sur $\mathbf{X}$ et puis nous verrons que, contrairement à ce qui se passait dans le cas où l'espace est contracté, il peut y avoir en général des valeurs propres de module 1 distincte de 1 ou même des fonctions $P-$invariantes non-constantes.

Cette étude nous permettra de comprendre pourquoi, pour le théorème de renouvellement, nous devons mettre une condition de cône convexe non-fixé par le support de la mesure.

Lemme 6.1.13. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe localement compact dénombrable à l'infini,* $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ *une fonction sous-multiplicative sur* $\mathbf{G}$ *et* ρ *une mesure borélienne de probabilité sur* $\mathbf{G}$*.*

Soit $(\mathbf{X}, d)$ *un espace métrique compact muni d'une action continue de* $\mathbf{G}$ *et d'une autre action d'un groupe fini* $\mathbf{H}$ *qui commute à celle de* $\mathbf{G}$ *et telle que* $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ *est* $(\rho, \gamma, M, N)-$*contracté au dessus d'un* $\mathbf{G}-$*ensemble fini* $\mathbf{A}$ *sur lequel la marche aléatoire définie par* ρ *est irréductible et apériodique.*

Alors, il existe au plus $|\mathbf{H}|$ *fermés invariants minimaux (pour l'action de* T_ρ*) que l'on note* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$*. Chacun est associé à une mesure* $P-$*invariante* ν_i *avec* $\operatorname{supp} \nu_i = \Lambda_i$*.*

De plus, pour tout $x \in \mathbf{X}$ *et* $\rho^{\otimes \mathbb{N}}-$*presque toute suite* $(g_n) \in \mathbf{G}^{\mathbb{N}}$*, la suite*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{g_k \cdots g_1 x}$$

converge vers une mesure ergodique ν_i *et si on note, pour* $i \in [1, r]$*,*

$$p_i(x) = \rho^{\otimes \mathbb{N}} \left(\left\{ (g_n) \middle| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{g_k \cdots g_1 x} \xrightarrow{\star} \nu_i \right\} \right)$$

on a que la fonction p_i *est continue,* $P-$*invariante,* $\sum_i p_i = 1$*,* $p_i = \delta_{i,j}$ *sur* Λ_j *(où* $\delta_{i,j}$ *est le symbole de Kronecker).*

Enfin, pour toute fonction continue f *sur* $\mathbf{X}$ *et tout* $x \in \mathbf{X}$*,*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{i=1}^{r} p_i(x) \int_{\mathbf{X}} f \mathrm{d}\nu_i$$

Démonstration. Soit Λ un fermé invariant minimal (il en existe car $\mathbf{X}$ est compact) et soit $h \in \mathbf{H}$. Alors, $h\Lambda$ est encore un fermé invariant puisque les actions de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ commutent. De plus il est également minimal car h est inversible.

Cela montre que, $\mathbf{H}\Lambda$ est encore un fermé $P-$invariant. Mais cette fois, il est aussi $\mathbf{H}-$invariant et donc $\pi_{\mathbf{H}}(\mathbf{H}\Lambda)$ est un fermé invariant de P comme opérateur sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X}/\mathbf{H})$. Or ce fermé est unique car P est contractant sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ et T_ρ agit transitivement sur $\mathbf{A}$ (voir la proposition 6.1.5) et donc cela montre que $\mathbf{H}\Lambda$ est unique et donc qu'il y a au plus $|\mathbf{H}|$ fermés invariant et $\mathbf{H}$ agit transitivement sur eux.

On a donc au plus $|\mathbf{H}|$ fermés invariant minimaux, on les note $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$ et on note Λ leur réunion.

Mais, nous avons vu dans la proposition 6.1.12 que P est équicontinu et en utilisant les propositions 3.2 et 3.3 de [Rau92], on obtient qu'il y a au plus r fonctions continues $P-$invariantes $p_1, \dots p_r$ formant une famille libre, et comme chacune est constante sur chaque Λ_i, on peut toujours supposer que $p_j = \delta_{i,j}$ sur Λ_i. Ainsi, en notant ν_i la mesure $P-$invariante sur Λ_i, on a que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x) \int f \mathrm{d}\nu_i$$

Il ne reste donc plus qu'à voir que p_i est bien la fonction que nous avons définie.

Premièrement, le fait que $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{g_k \cdots g_1 x}$ converge ps pour tout $x \in \mathbf{X}$ vers une mesure ergodique dépendant continûment de x est une conséquence de l'équicontinuité de P et des propositions de Raugi déjà mentionnées.

Et le fait que la fonction p_i que nous avons définie est $P-$invariante vient aussi de ces propositions (voir aussi l'égalité 2.11 de [BQ14]). Nous pouvons donc conclure par unicité des fonction $p_1, \dots, p_r$. □

6.1.3 Marche ralentie

Soit $\mathbf{G}$ un groupe. Si ρ est une mesure sur $\mathbf{G}$, il nous sera utile d'introduire la mesure associée à la marche ralentie :

$$\rho_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\rho \tag{6.1.4}$$

Le principal intérêt de cette mesure est que $(\operatorname{supp} \rho_{\mathbf{e}}^{\star n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante. Mais en plus, on a aussi que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\lambda I_d - P_{\rho_{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}((2\lambda - 1)I_d - P_\rho)$$

donc les valeurs spectrales de $P_{\rho_{\mathbf{e}}}$ et celles de P_ρ sont liées (en particulier, pour $\lambda = 1$, on trouve que $I_d - P_{\rho_{\mathbf{e}}} = \frac{1}{2}(I_d - P_\rho)$).

Le lemme suivant montre que cette mesure garde d'autres propriétés de ρ.

Lemme 6.1.14. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact et dénombrable à l'infini et ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.*

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact muni d'une action continue de $\mathbf{G}$ et d'une action d'un groupe fini $\mathbf{H}$ qui commute à celle de $\mathbf{G}$ et telle que $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$ sur lequel la marche aléatoire définie par ρ est irréductible et apériodique.

Alors, $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est également $(\rho_{\mathbf{e}}, \gamma, M, N)-$contracté au dessus de $\mathbf{A}$.

Démonstration. Il est clair que les deux premières propriétés sont vérifiées par $\rho_{\mathbf{e}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\rho_{\mathbf{e}}^{\star n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \rho^{\star k}$$

Et donc, pour tout $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $x \neq y$ et $\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{G}} \frac{d(gx, gy)^\gamma}{d(x, y)^\gamma} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star n}(g) &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_{\mathbf{G}} \frac{d(gx, gy)^\gamma}{d(x, y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{\star k}(g) \\ &\leqslant \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} C_1 e^{-\delta k} \leqslant C_1 \left(\frac{1 + e^{-\delta}}{2} \right)^n\end{aligned}$$ □

De la même manière, on montre le

Lemme 6.1.15. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe topologique et* ρ *une mesure borélienne de probabilité sur* $\mathbf{G}$*.*

Soit $(\mathcal{B}, \| \,.\, \|_{\mathcal{B}})$ *un espace de Banach et* $r : \mathbf{G} \to \mathrm{GL}(\mathcal{B})$ *une représentation telle que* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{G} \times \mathcal{B} & \to & \mathcal{B} \\ (g, b) & \mapsto & r(g)b \end{array} \right.$ *est continue et* $\int_{\mathbf{G}} \|r(g)\| \mathrm{d}\rho(g)$ *est finie.*

On note P_ρ *l'opérateur* $b \mapsto \int_{\mathbf{G}} r(g)(b) \mathrm{d}\rho(g)$*.*

On suppose qu'il existe un opérateur continu N_0 *sur* $\mathcal{B}$ *et* $C, \kappa \in \mathbb{R}$ *tels que pour tout entier* n*,* $\|P_\rho^n - N_0\|_{\mathcal{B}} \leqslant C e^{-\kappa n}$*, alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$\|P_{\rho_{\mathbf{e}}}^n - N_0\|_{\mathcal{B}} \leqslant C \left(\frac{1 + e^{-\kappa}}{2} \right)^n$$

où $P_{\rho_{\mathbf{e}}}$ *est l'opérateur associé à* $\rho_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\rho$*.*

6.1.4 Perturbation des opérateurs par des cocycles

Dans ce paragraphe, $\mathbf{G}$ est toujours un groupe localement compact agissant sur un espace métrique compact $(\mathbf{X}, d)$ qui fibre de manière $\mathbf{G}-$équivariante au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$.

Nous allons étudier à présent un certain type de perturbation des opérateurs de Markov venant d'une action d'un groupe sur un ensemble. Pour cela, on fait la

Définition 6.1.16 (Cocycles additifs)**.** Soit $\mathbf{G}$ un groupe topologique et $\mathbf{X}$ un espace métrique muni d'une action mesurable de $\mathbf{G}$.

On dit qu'une fonction continue $\sigma : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ est un *cocycle* additif si pour tous $g_1, g_2 \in \mathbf{G}$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\sigma(g_2 g_1, x) = \sigma(g_2, g_1 x) + \sigma(g_1, x)$$

Parmi les cocycles, on appelle *cobords* ceux donnés par $\sigma(g, x) = \varphi(gx) - \varphi(x)$ où $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Dans cette thèse, comme nous ne considérerons que des cocycles additifs, nous parlerons simplement de cocycle en sous-entendant l'additivité.

Remarque 6.1.17. Soit σ un cocycle (additif). Alors, l'opérateur défini pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et tout $x \in \mathbf{X}$ par

$$P(it)f(x) = \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) \mathrm{d}\rho(g)$$

est continu dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$, tout $x \in \mathbf{X}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$P^n(it)f(x) = \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \text{ et } \|P(it)^n f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$$

C'est pour avoir cette égalité que nous considérons des cocycles et non pas des fonctions quelconques sur $\mathbf{G} \times \mathbf{X}$.

Comme nous allons nous interesser à des chaînes de Markov sur des espaces contractés (et donc à des fonctions hölderiennes), nous cherchons des conditions pour que $P(it)$ préserve les fonctions hölderiennes sur $\mathbf{X}$.

Pour un cocycle σ et $g \in \mathbf{G}$, on note

$$\sigma_{\sup}(g) = \sup_{x \in \mathbf{X}} |\sigma(g,x)| \text{ et } \sigma_{\mathrm{Lip}}(g) = \sup_{\substack{x,y \in \mathbf{X} \\ \pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y) \\ x \neq y}} \frac{|\sigma(g,x) - \sigma(g,y)|}{d(x,y)}$$

Alors, pour tout $x, y \in \mathbf{X}$ avec $x \neq y$ et $\pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y)$,

$$\begin{aligned} 2^{\gamma-1} \left| e^{-it\sigma(g,x)} - e^{-it\sigma(g,y)} \right| &\leqslant \left| e^{-it\sigma(g,x)} - e^{-it\sigma(g,y)} \right|^\gamma \leqslant |t|^\gamma |\sigma(g,x) - \sigma(g,y)|^\gamma \\ &\leqslant |t|^\gamma \sigma_{\mathrm{Lip}}^\gamma(g) d(x,y)^\gamma \end{aligned}$$

Ainsi, si $\sigma_{\mathrm{Lip}}(g)$ est finie pour tout $g \in \mathbf{G}$, alors l'application $(x \mapsto e^{-it\sigma(g,x)})$ est Hölderienne.

On note, pour $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\mathcal{Z}_N^M(\mathbf{X}) = \left\{ \sigma \text{ est un cocycle continu} \middle| \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{\sigma_{\mathrm{Lip}}(g)}{N(g)^M} \text{ et } \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{e^{\sigma_{\sup}(g)}}{N(g)^M} \text{ sont finis} \right\}$$

et, pour $\sigma \in \mathcal{Z}^M(\mathbf{X})$, on note

$$[\sigma]_M = \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{\sigma_{\mathrm{Lip}}(g)}{N(g)^M} \text{ et } [\sigma]_\infty = \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{e^{\sigma_{\sup}(g)}}{N(g)^M} \tag{6.1.5}$$

La proposition suivante est une extension à notre contexte du corollaire 3.21 de Guivarc'h et Le Page dans [GL12].

Proposition 6.1.18. *Soit* $\mathbf{G}$ *un groupe localement compact dénombrable à l'infini,* $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ *une fonction sous-multiplicative sur* $\mathbf{G}$ *et soit* ρ *une mesure borélienne de probabilité sur* $\mathbf{G}$.

Soit $(\mathbf{X}, d)$ *un espace métrique compact muni d'une action continue de* $\mathbf{G}$ *et d'une autre action d'un groupe fini* $\mathbf{H}$ *qui commute à celle de* $\mathbf{G}$ *et telle que* $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ *est* $(\rho, \gamma_0, M, N)-$*contracté au dessus d'un* $\mathbf{G}-$*ensemble fini* $\mathbf{A}$ *sur lequel la marche aléatoire définie par* ρ *est irréductible et apériodique.*

Soit $\sigma \in \mathcal{Z}_N^M(\mathbf{X}/\mathbf{H})$. *Alors il existe* $C_2, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^\star$ *telles que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *tout entier* $n \in \mathbb{N}$ *et toute fonction* $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, *on ait*

$$m_\gamma(P^n(it)f) \leqslant C_2 \left(\|f\|_\infty (1 + |t|) + e^{-\delta_2 n} m_\gamma(f) \right)$$

En particulier, l'opérateur $P(it)$ *a un rayon spectral essentiel inférieur ou égal à* $e^{-\delta_2}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ et $x, y \in \mathbf{X}$ tels $x \neq y$ et $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a que

$$\begin{aligned}
|P^n(it)f(x) - P^n(it)f(y)| &= \left| \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) - e^{-it\sigma(g,y)} f(gy) \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \right| \\
&\leqslant \int_{\mathbf{G}} |f(gx) - f(gy)| \, \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) + \|f\|_\infty \int_{\mathbf{G}} \left| e^{-it\sigma(g,x)} - e^{-it\sigma(g,y)} \right| \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \\
&\leqslant d(x,y)^\gamma m_\gamma(f) \int_{\mathbf{G}} \frac{d(gx,gy)^\gamma}{d(x,y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \\
&\qquad + \|f\|_\infty 2^{1-\gamma} |t|^\gamma [\sigma]_M d(x,y)^\gamma \int_{\mathbf{G}} N^{\gamma M}(g) \mathrm{d}\rho^{\star n}(g)
\end{aligned}$$

Premièrement, on note que comme N est sous-multiplicative, nous avons que

$$\int_{\mathbf{G}} N(g)^{\gamma M} \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \leqslant \left(\int_{\mathbf{G}} N^{\gamma M}(g) \mathrm{d}\rho(g) \right)^n$$

De plus, comme $\mathbf{H}$ est un groupe fini, il existe $d_0 \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que pour tout $x, y \in \mathbf{X}$, si $d(x,y) \leqslant d_0$, alors $d(x,y) = d(\pi_{\mathbf{H}}(x), \pi_{\mathbf{H}}(y))$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et tous $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $0 < d(x,y) \leqslant \varepsilon d_0$ et $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$, on a

$$\begin{aligned}
I_n(x,y) :&= \int_{\mathbf{G}} d(gx,gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \\
&= \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{d(gx,gy) \leqslant d_0} d(gx,gy)^\gamma + \mathbb{1}_{d(gx,gy) > d_0} d(gx,gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \\
&= \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{d(gx,gy) \leqslant d_0} d(g\pi_{\mathbf{H}} x, g\pi_{\mathbf{H}} y)^\gamma + \mathbb{1}_{d(gx,gy) > d_0} d(gx,gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \\
&\leqslant C_1 e^{-\delta n} d(x,y)^\gamma + d(x,y)^\gamma \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{d(gx,gy) > d_0} M^\gamma N(g)^{M\gamma} \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \\
&\leqslant \left(C_1 e^{-\delta n} + M^\gamma \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{MN(g)^M \geqslant 1/\varepsilon} N(g)^{\gamma M} \mathrm{d}\rho^{\star n}(g) \right) d(x,y)^\gamma
\end{aligned}$$

Ainsi, si n_0 est tel que $C_1 e^{-\delta n_0} \leqslant 1/4$, comme $\int_{\mathbf{G}} N(g)^{\gamma M} \mathrm{d}\rho^{\star n_0}(g)$ est fini, on peut choisir ε tel que

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{N(g)^M \geqslant 1/\varepsilon} M^\gamma N(g)^{\gamma M} \mathrm{d}\rho^{\star n_0}(g) \leqslant 1/4$$

Et donc, pour ce choix de ε et n_0, on a que pour tout $x, y \in \mathbf{X}$ tels que $0 < d(x,y) \leqslant \varepsilon d_0$ et $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$,

$$\int_{\mathbf{G}} d(gx, gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{\star n_0}(g) \leqslant \frac{1}{2} d(x,y)^\gamma$$

Cela montre que pour tout $x, y \in \mathbf{X}$ avec $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$ et $d(x,y) \leqslant \varepsilon d_0$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$\frac{|P^{n_0}(it)f(x) - P^{n_0}(it)f(y)|}{d(x,y)^\gamma} \leqslant \frac{1}{2} m_\gamma(f) + \|f\|_\infty 2^{1-\gamma} |t|^\gamma [\sigma]_{M} \left(\int_{\mathbf{G}} N^{\gamma_0 M}(g) \mathrm{d}\rho(g) \right)^n$$

Mais comme on a aussi, pour x, y tels que $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$ et $d(x,y) \geqslant \varepsilon d_0$,

$$\frac{|P^{n_0}(it)f(x) - P^{n_0}(it)f(y)|}{d(x,y)^\gamma} \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{(\varepsilon d_0)^\gamma}$$

on obtient que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$m_\gamma(P^{n_0}(it)f) \leqslant \frac{1}{2} m_\gamma(f) + \left(\frac{2}{(\varepsilon d_0)^\gamma} + 2^{1-\gamma} |t|^\gamma [\sigma]_{M} \left(\int_{\mathbf{G}} N^{\gamma_0 M}(g) \mathrm{d}\rho(g) \right)^{n_0} \right) \|f\|_\infty$$

En simplifiant les notations, ce que l'on a montré, c'est qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^\star$ et une constante $C \in \mathbb{R}_+$ (dépendant de n_0) tels que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$m_\gamma(P^{n_0}(it)f) \leqslant \frac{1}{2} m_\gamma(f) + C(1 + |t|)\|f\|_\infty$$

En itérant cette inégalité, on trouve qu'il existe des constantes $C_2, \delta_2 \in \mathbb{R}_+^\star$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$m_\gamma(P^n(it)f) \leqslant C_2 \left(e^{-\delta_2 n} m_\gamma(f) + (1 + [\sigma]_{M})\|f\|_\infty \right)$$

Cela montre, en utilisant le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (que nous avons rappelé dans le théorème 6.1.10), que l'opérateur $P(it)$ a un rayon spectral essentiel inférieur à $e^{-\delta_2}$. □

6.1.5 Régularité inférieure des mesures boréliennes sur les espaces métriques

Guivarc'h a montré (cf. [BL85]) que si ρ est une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, alors il existe une unique mesure $P-$invariante ν sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$. De plus, il existe $\Delta^+, C \in \mathbb{R}_+^\star$ tels que pour tout $x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$,

$$\nu(B(x,r)) \leqslant Cr^{\Delta^+}$$

(le lecteur peut se référer au chapitre 12 de [BQ15] pour une preuve de ce résultat).

Cette propriété de régularité supérieure de la mesure ν veut dire que ν n'est pas trop concentrée au voisinage des points. En effet, si ν avait un atome x_0, on aurait que pour tout $\Delta^+ \in \mathbb{R}_+^\star$, $\liminf_{r\to 0^+} \nu(B(x_0,r))/r^{\Delta_+} \geqslant \liminf_{r\to 0^+} \nu(x_0)/r^{\Delta_+} = +\infty$.

Ici, nous aurons besoin d'utiliser la régularité inférieure de la mesure ν : à plusieurs reprises, nous aurons besoin du fait que la mesure d'une boule de rayon r est minorée par une puissance de r. Comme cette propriété ne peut pas être valide pour tous les points (cela impliquerait en particulier que le support de ν serait $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ ce qui est faux en général), on est amenés à faire la

Définition 6.1.19. Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact et ν une mesure de probabilité sur $\mathbf{X}$.

Soit $\Delta \in \mathbb{R}_+$ et $t, r \in \mathbb{R}_+^\star$.

On dit qu'un point $x \in \mathbf{X}$ est $(\Delta, t) - \nu-$*régulier à l'échelle* r si

$$\nu(B(x,r)) \geqslant tr^\Delta$$

Nous dirons de même qu'un point est $(\Delta, t) - \nu-$régulier à toutes les échelles si

$$\inf_{r\in]0,1]} \frac{\nu(B(x,r))}{r^\Delta} \geqslant t$$

Enfin, nous dirons qu'un point est $\Delta - \nu-$régulier à l'échelle r si il est $(\Delta, 1) - \nu$-régulier à l'échelle r.

Remarque 6.1.20. Si $\mathbf{X}$ a une dimension de Hausdorff inférieure à Δ alors on a (cf. [Rud87]) que

$$\nu\left(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+^\star} \{x \in \mathbf{X} | x \text{ est } (\Delta, t) - \nu - \text{régulier à toutes les échelles}\}\right) = 1$$

Par abus de langage, si $\pi_0 : \mathbf{X} \to \mathbf{X}_0$ est un revêtement et ν est une mesure de probabilité sur $\mathbf{X}_0$, on dira que $x \in \mathbf{X}$ est $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle r si $\pi_0(x)$ l'est.

6.1.6 Décomposition en types

Dans ce paragraphe, nous rappelons comment généraliser la décomposition d'une fonction sur $\mathbb{R}$ en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit $\mathbf{H}$ un groupe fini. Pour une représentation unitaire irréductible $\xi = (\rho, \mathbb{V})$ de $\mathbf{H}$, on munit $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ du produit scalaire de Hilbert-Schmidt défini pour $A, B \in \mathrm{End}(\mathbb{V})$ par

$$\langle A, B\rangle_{HS} := \mathrm{tr} A^\star B$$

Et de la norme $| \,.\, |_{HS}$ correspondant.

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact sur lequel agit par isométrie le groupe $\mathbf{H}$ (cela implique en particulier que $\mathbf{H}$ préserve l'espace des fonctions hölderiennes sur $\mathbf{X}$).

L'action de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{X}$ produit une représentation de $\mathbf{H}$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ définie pour $h \in \mathbf{H}$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et $x \in \mathbf{X}$ par

$$\rho_0(h) f(x) = f(h^{-1}x)$$

On note $\widehat{\mathbf{H}}$ un ensemble de représentants de classes d'isomorphisme de représentations unitaires irréductibles de $\mathbf{H}$. C'est un ensemble fini.

Pour $\xi = (\rho, \mathbb{V}) \in \widehat{\mathbf{H}}$, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et $x \in \mathbf{X}$, on note

$$\widehat{f}(x,\xi) = \frac{\dim \mathbb{V}}{|\mathbf{H}|} \sum_{h\in\mathbf{H}} f(h^{-1}x)\rho(h)^\star \tag{6.1.6}$$

Alors, nous avons (voir le théorème 8 de [Ser78]) que pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$f(x) = \sum_{\xi\in\widehat{\mathbf{H}}} \mathrm{tr} \widehat{f}(x,\xi) \tag{6.1.7}$$

Cependant, nous aurons besoin de la relation d'équivariance suivante : pour tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $h \in \mathbf{H}$,

$$\widehat{f}(hx,\xi) = \frac{\dim \mathbb{V}}{|\mathbf{H}|} \sum_{h'\in\mathbf{H}} f((h^{-1}h')^{-1}x)\rho(h')^\star = \widehat{f}(x,\xi)\rho(h)^\star$$

Ainsi, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$, tout $x \in \mathbf{X}$, tout $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$ et tout $h \in \mathbf{H}$, on a

$$|\widehat{f}(hx,\xi)|_{HS} = |\widehat{f}(x,\xi)|_{HS}$$

et la fonction $(x \mapsto |\widehat{f}(x,\xi)|_{HS})$ s'identifie donc à une fonction continue sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$.

La norme $|\,.\,|_{HS}$ permet de définir une norme uniforme sur les fonctions bornées de $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathbb{V})$. On note donc, pour une telle fonction,

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{X}} |f(x)|_{HS}$$

De même, on peut définir les fonctions hölderiennes de $\mathbf{X}$ dans $\mathrm{End}(\mathbb{V})$ et on note donc

$$\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X}, \mathrm{End}(\mathbb{V})) = \left\{ f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X}, \mathrm{End}(\mathbb{V}_\xi)) \middle| \forall x \in \mathbf{X}\, \forall h \in \mathbf{H}\ f(hx) = f(x)\rho(h)^\star \right\}$$

(Pour simplifier les notations, nous noterons généralement cet ensemble $\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ ou même, $\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}$).

Et nous avons donc le

Lemme 6.1.21. *Soit $\mathbf{H}$ un groupe fini agissant par isométries sur un espace métrique $(\mathbf{X}, d)$.*

Alors, l'espace $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ s'injecte dans $\prod_{\xi\in\widehat{\mathbf{H}}} \mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X}, \mathrm{End}(\mathbb{V}))$. De plus, pour $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$, la projection sur $\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ est donnée par l'équation (6.1.6) et l'application réciproque est donnée par l'équation (6.1.7).

6.2 Contrôle de la résolvante de l'opérateur perturbé

6.2.1 Énoncé de la proposition

Nous pouvons à présent énoncer la proposition 6.2.1, objet de ce chapitre.

On reprends les notations des sections précédentes.

Soit $\sigma : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ un cocycle $\mathbf{H}-$invariant. On note, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(it)$ (ou parfois $P_\rho(it)$ pour insister sur la mesure ρ) l'opérateur défini, pour toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$ et tout x de $\mathbf{X}$, par

$$P(it)f(x) = \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx)\mathrm{d}\rho(g)$$

Si $\rho_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\rho$, on notera simplement, $P_{\mathbf{e}}(it) = P_{\rho_{\mathbf{e}}}(it)$ l'opérateur associé à la marche ralentie.

Enfin, on définit

$$[\sigma]_M = \sup_{g\in\mathbf{G}} \sup_{\substack{x,y\in\mathbf{X} \\ x\neq y \\ \pi_{\mathbf{A}}(x)=\pi_{\mathbf{A}}(y)}} \frac{|\sigma(g,x) - \sigma(g,y)|}{N(g)^M d(x,y)}$$

Nous avons vu dans le paragraphe 6.1.4 que si $[\sigma]_M$ est fini et si $(g \mapsto N(g)^{M\gamma})$ est $\rho-$intégrable alors $P(it)$ préserve les fonctions $\gamma-$Holdëriennes sur $\mathbf{X}$.

Le but du chapitre est d'étudier les propriétés de $P(it)$ en fonction de celles de P. Un premier cas particulier est quand $e^{-it\sigma}$ est un cobord : $e^{-it\sigma(g,x)} = \varphi(gx)\varphi(x)^{-1}$ où φ est une fonction $\gamma-$Holdërienne à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{U}$ des complexes de module 1. Car en effet, dans ce cas là, l'opérateur $P(it)$ est conjugué à P par la multiplication par φ et ces deux opérateurs ont donc les mêmes propriétés spectrales. En particulier, $P(it)$ admet 1 pour valeur propre (le vecteur propre associé étant φ^{-1}).

Nous allons voir que l'on peut en fait obtenir une réciproque partielle de ce résultat. La proposition suivante montre que si $I_d - P(it)$ n'est pas bien inversible (la norme de l'inverse est grande) alors $e^{-it\sigma}$ est proche d'un cobord.

Proposition 6.2.1. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact dénombrable à l'infini, $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$ et soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.*

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact muni d'une action continue de $\mathbf{G}$ et d'une autre action par isométries d'un groupe fini $\mathbf{H}$ qui commute à celle de $\mathbf{G}$ et telle que $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$ sur lequel la marche aléatoire définie par ρ est irréductible et apériodique. Nous fixons un ensemble $\widehat{\mathbf{H}}$ de représentants de classes d'isomorphismes de représentations unitaires irréductibles de $\mathbf{H}$.

Soit ν l'unique mesure $P-$invariante sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ donnée par la proposition 6.1.5.

Alors, pour tout $\gamma > 0$ assez petit, tout $\alpha_1, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $\Delta \in \mathbb{R}_+$ tel qu'il existe un point $x \in \mathbf{X}/\mathbf{H}$ qui soit $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle $2^{-\alpha_2}$ (voir la définition 6.1.19) on a qu'il existe $L, C \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant 2$, on a que si

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})} \geqslant C|t|^L$$

alors il existe $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\xi(\mathbf{X})$ avec $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et $m_\gamma(f) \leqslant C|t|$ telle que pour tout point x de $\mathbf{X}$ dont la projection sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $\Delta - \nu$-régulière à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$, on ait

$$|f(x)|_{HS} \geqslant \frac{1}{2}$$

et

$$\int_{\mathbf{G}} \left| e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) - f(x) \right|_{HS}^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star n(\beta,t)}(g) \leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

où l'on a noté

$$n(\beta, t) = \lfloor \beta \ln |t| \rfloor$$

et $\rho_{\mathbf{e}}$ est la mesure associée à la marche ralentie (voir le paragraphe 6.1.3).

Remarque 6.2.2. Notons que dans la conclusion de la proposition, c'est bien la mesure $\rho_{\mathbf{e}}$ qui apparaît et non pas la mesure ρ elle-même. Cela ne changera rien à notre étude puisque cette mesure a les mêmes moments que la mesure ρ et son support engendre le même groupe.

Remarque 6.2.3. On aurait envie de poser $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\dim \mathbb{V}}} \mathrm{tr} f(x)$ car alors, on aurait que

$$\int_{\mathbf{G}} \left| e^{-it\sigma(g,x)} \varphi(gx) - \varphi(x) \right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star n(\beta,t)}(g) \leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

Et donc si φ ne s'annulait pas sur $\mathbf{X}$, le théorème impliquerait que $e^{-it\sigma}$ serait proche du cocycle $\varphi(x)\varphi(gx)^{-1}$ qui est bien un cobord (multiplicatif). Cependant, notre contrôle sur $|f(x)|_{HS}$ ne nous donne aucun contrôle sur $|\varphi(x)|$.

6.2.2 Démonstration

La démonstration repose sur une série de lemmes adaptés de ceux de Dolgopyat pour les opérateurs de Ruelle.

Le premier point est de lever la difficulté technique qui vient du fait que seulement $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus de $\mathbf{A}$ et non pas $\mathbf{X}$ tout entier. Pour cela, nous allons utiliser la décomposition en type vue dans le lemme 6.1.21 et le fait que $\mathbf{G}$ préserve cette décomposition puisque les actions de $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ commutent. Comme on a aussi supposé que σ est $\mathbf{H}-$invariant, on pourra étudier notre opérateur $P(it)$ dans chaque $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{\xi}(\mathbf{X})$.

Il faut également remarquer qu'il y a un équivalent de la proposition proposition 6.1.18 dans l'espace $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{\xi}(\mathbf{X})$.

La proposition 6.1.18 suggère qu'il faille renormaliser la norme dans $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ pour étudier $P(it)$. Cest pourquoi, on fait la

Notation. Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1, on note C_2 la constante donnée par la proposition 6.1.18 (que l'on peut supposer sans perte de généralité plus grande que 1).

Soit $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant 2$. Alors, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, on note

$$\|f\|_{(t)} = \max\left(\|f\|_\infty, \frac{m_\gamma(f)}{2C_2|t|} \right)$$

De la même manière, on définit la norme $\|\,.\,\|_{(t)}$ pour les fonctions de $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{\xi}(\mathbf{X})$.

Remarquons que pour tout $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$\|f\|_{(t)} \leqslant \|f\|_\gamma \leqslant (1 + 2C_2|t|)\, \|f\|_{(t)}$$

donc $(\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X}), \|\,.\,\|_\gamma)$ et $(\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X}), \|\,.\,\|_\sigma)$ sont isomorphes. Et de plus, $P(it)$ est mieux contrôlé en norme $\|\,.\,\|_{(t)}$ comme le montre le

Lemme 6.2.4. *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant 2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|P(it)^n\|_{(t)} \leqslant 2C_2$$

Remarque 6.2.5. Ce lemme est encore vrai dans l'espace $\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}$ telle que $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$. D'après la proposition 6.1.18, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{m_\gamma(P^n(it)f)}{2C_2|t|} \leqslant \frac{1}{2|t|}\left(1 + |t| + 2C_2|t|e^{-\delta_2 n}\right) \leqslant 1 + C_2 e^{-2\delta n} \leqslant 2C_2$$

De plus, on a toujours

$$\|P(it)^n f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \leqslant 1$$

et donc,

$$\|P^n(it)\|_\sigma \leqslant 2C_2$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Pour α_2, Δ, σ et ξ fixés, nous allons étudier l'hypothèse :

$\mathbf{H}(\alpha_1, \beta, \xi)$: Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ de norme $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$, il existe un point $x_0 \in \mathbf{X}$ qui est $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$ et $n \in [0, \lfloor \beta \ln |t| \rfloor]$ tels que

$$|P_{\mathbf{e}}(it)^n f(x_0)|_{HS} \leqslant 1 - \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

Lemme 6.2.6. *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1, pour tous $\alpha_1, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$ il existe $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+^\star$ tel que pour tout $\Delta \in \mathbb{R}_+^\star$, il existe L, C, tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant 2$ et tout $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$, on a que si l'hypothèse $\mathbf{H}(\alpha_1, \beta, \xi)$ est vraie alors*

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})} \leqslant C|t|^L$$

Démonstration. Soient $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$ et $f \in \mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ une fonction telle que $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$.

Par hypothèse, il existe $n \in [0, n(\beta, |t|)]$ et un point $x_0 \in \mathbf{X}$ dont la projection sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $\Delta - \nu$-régulière à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$ tels que

$$|P_{\mathbf{e}}^n(it) f(x_0)|_{HS} \leqslant 1 - \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

Nous allons montrer dans un premier temps que cette majoration en un seul point x_0 peut s'étendre en un contrôle de la norme infinie de $P_{\mathbf{e}}^m(it)f$ pour un certain m puis nous verrons que cela entraîne alors le résultat.

Premièrement, en utilisant l'inégalité triangulaire, nous avons, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \geqslant n$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned} |P_{\mathbf{e}}^m(it)f(x)|_{HS} &= \left| \int_{\mathbf{G}} e^{it\sigma(g,x)} P_{\mathbf{e}}(it)^n f(gx) \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star m-n}(g) \right|_{HS} \\ &\leqslant \int_{\mathbf{G}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(gx)|_{HS} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star m-n}(g) = P_{\mathbf{e}}^{m-n}|P_{\mathbf{e}}^n(it)f|_{HS}(x) \end{aligned}$$

De plus, comme σ est $\mathbf{H}-$équivariant et que les actions de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{G}$ commutent, on a aussi, par définition de $\mathcal{C}_{\xi}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, que pour tout $m \in \mathbb{N}$, la fonction $|P_{\mathbf{e}}^m(it)f|_{HS}$ est $\mathbf{H}-$invariante (cf. le lemme 6.1.21). Elle passe donc au quotient par l'action de $\mathbf{H}$ et on a, d'après la proposition 6.1.7,

$$P_{\mathbf{e}}^{m-n}|P_{\mathbf{e}}^n(it)f(gx)|_{HS}(x) \leqslant \int_{\mathbf{X}/\mathbf{H}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(y)|_{HS} \mathrm{d}\nu(y) + C_0 C_{\mathbf{A}} e^{-\kappa(m-n)} \|P_{\mathbf{e}}^n(it)f\|_{\gamma}$$

De plus, en utilisant le lemme 6.2.4 et l'hypothèse que $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$ et que $C_2 \geqslant 1$, on peut calculer

$$\begin{aligned} \|P_{\mathbf{e}}^n(it)f\|_{\gamma} = \|P_{\mathbf{e}}^n(it)f\|_{\infty} + m_{\gamma}(P_{\mathbf{e}}^n(it)f) &\leqslant 1 + C_2\left((1+|t|)\|f\|_{\infty} + e^{-\delta n} m_{\gamma}(f)\right) \\ &\leqslant 1 + C_2(2|t| + 2e^{-\delta_2 n} C_2|t|) \\ &\leqslant 5C_2^2|t| \end{aligned}$$

De plus, comme $n \leqslant \beta \ln |t|$, on a également

$$e^{\kappa n}|t| \leqslant e^{\kappa\beta \ln|t|}|t| \leqslant |t|^{1+\beta\kappa}$$

Et donc, on obtient que pour tout $m \in \mathbb{N}$ plus grand que $\beta \ln |t|$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$|P_{\mathbf{e}}(it)^m f(x)|_{HS} \leqslant \int_{\mathbf{X}/\mathbf{H}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(y)|_{HS} \mathrm{d}\nu(y) + 5C_0 C_{\mathbf{A}} C_2^2 e^{-\kappa m} b^{1+\beta\kappa}$$

De plus, si $\mathbf{Z}$ est une partie mesurable de $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ et $M_{\mathbf{Z}} = \sup_{x\in\mathbf{Z}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(x)|_{HS}$, alors,

$$\int_{\mathbf{X}/\mathbf{H}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(y)|_{HS} \mathrm{d}\nu(y) \leqslant M_{\mathbf{Z}}\nu(\mathbf{Z}) + \nu(\mathbf{Z}^c) \leqslant 1 + (M_{\mathbf{Z}} - 1)\nu(\mathbf{Z})$$

En prenant $\mathbf{Z} = B(\pi_{\mathbf{H}}(x_0), r)$ où on a noté $r = (1/(10C_2^2|t|^{\alpha_1+1}))^{1/\gamma}$, on obtient que

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbf{Z}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(x)|_{HS} &\leqslant |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(\pi_{\mathbf{H}}(x_0))|_{HS} + \|P_{\mathbf{e}}^n(it)f\|_{\gamma} d(x, \pi_{\mathbf{H}}(x_0))^{\gamma} \\ &\leqslant 1 - \frac{1}{|t|^{\alpha_1}} + 5C_2^2|t|r^{\gamma} = 1 - \frac{1}{2|t|^{\alpha_1}} \end{aligned}$$

et en prenant α_2 assez grand pour que $|t|^{-\alpha_2} \leqslant (1/(5C_2^2|t|^{\alpha_1+1}))^{1/\gamma}$, nous avons que $|t|^{-\alpha_2} \leqslant r$ et donc, comme x est $\Delta - \nu-$régulier à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$,

$$\nu(\mathbf{Z}) \geqslant |t|^{-\alpha_2 \Delta}$$

et donc,

$$\int_{\mathbf{X}/\mathbf{H}} |P_{\mathbf{e}}^n(it)f(y)|_{HS}\mathrm{d}\nu(y) \leqslant 1 - \frac{1}{2|t|^{\alpha_1+\alpha_2\Delta}}$$

En résumé, on trouve que pour tout $m \in \mathbb{N}$ plus grand que $\beta \ln |t|$,

$$\|P_{\mathbf{e}}(it)^m f\|_\infty \leqslant 1 - \frac{1}{2|t|^{\alpha_1+\alpha_2\Delta}} + 5C_0C_{\mathbf{A}}C_2^2 e^{-\kappa m}|t|^{1+\beta\kappa} \tag{6.2.1}$$

Pour simplifier les notations, on note $\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2\Delta$.

Soit $m = Kn(\beta, |t|)$, alors

$$\|P_{\mathbf{e}}^m(it)\|_\infty \leqslant 1 - \frac{1}{2|t|^{\alpha_3}} + 4C_0C_2^2C_{\mathbf{A}}|t|^{1+\beta\kappa-K\kappa\beta}$$

et donc pour K assez grand (on rappelle que $|t| \geqslant 2$), on a que

$$\|P_{\mathbf{e}}^m(it)f\|_\infty \leqslant 1 - \frac{1}{4|t|^{\alpha_3}}$$

De plus, pour $l \in \mathbb{N}$ plus grand que m, en utilisant la proposition 6.1.18, on trouve que,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2C_2|t|}m_\gamma(P_{\mathbf{e}}^l(it)f) &\leqslant \|P_{\mathbf{e}}^m(it)f\|_\infty + \frac{1}{2|t|}e^{-\delta(l-m)}m_\gamma(P_{\mathbf{e}}^m(it)f) \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{4|t|^{\alpha_3}} + \frac{1}{2|t|}e^{-\delta l}|t|^{K\beta\delta}4C_2^2|t| \\
&\leqslant 1 - \frac{1}{4b^{\alpha_3}} + 2C_2^2 e^{-\delta l}|t|^{K\beta\delta}
\end{aligned}$$

Donc en prenant $l = Lm = KLn(\beta, |t|)$, où $L \in \mathbb{N}$ est assez grand, on a que

$$\frac{1}{2C_2|t|}m_\gamma(P_{\mathbf{e}}^l(it)f) \leqslant 1 - \frac{1}{8|t|^{\alpha_3}}$$

Comme par ailleurs,

$$\|P_{\mathbf{e}}^l(it)f\|_\infty \leqslant \|P_{\mathbf{e}}^m(it)f\|_\infty \leqslant 1 - \frac{1}{4|t|^{\alpha_3}}$$

ce que l'on a montré, c'est que sous les hypothèses du théorème, si $\mathbf{H}(\alpha_1, \beta, \xi)$ est vraie, alors pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ telle que $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$,

$$\|P_{\mathbf{e}}^l(it)f\|_{(t)} \leqslant 1 - \frac{1}{8|t|^{\alpha_3}}$$

Et donc, dans $C_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$\|(I_d - P_{\mathbf{e}}^l(it))^{-1}\|_\sigma \leqslant 8|t|^{\alpha_3}$$

De plus, comme

$$(I_d - P_{\mathbf{e}}(it))^{-1} = \sum_{k=0}^{l-1} P_{\mathbf{e}}(it)^k (I_d - P_{\mathbf{e}}(it)^l)^{-1} \text{ et } \frac{1}{2}(I_d - P(it))^{-1} = 2(I_d - P_{\mathbf{e}}(it))^{-1},$$

on peut calculer

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{(\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X}),\|\cdot\|_{(t)})} \leqslant 2\sum_{k=0}^{l-1} \|P_{\mathbf{e}}^k(it)\|_{(t)} \|(I_d - P_{\mathbf{e}}(it)^l)^{-1}\|_{(t)} \leqslant 2C_2 l 8 b^{\alpha_3}$$

Enfin, comme pour toute $f \in \mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$\|f\|_{(t)} \leqslant \|f\|_\gamma \leqslant (1 + 2C_2|t|)\|f\|_{(t)}$$

on a que dans $\mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_\gamma \leqslant (1 + 2C_2|t|)16C_2|t|^{1+\alpha_3} l$$

et, comme et comme l est majoré par le produit de $\ln|t|$ et d'une constante, on a le résultat espéré pour $\alpha' > 1 + \alpha_3$. □

Nous avons vu dans le lemme 6.2.6 ce qu'il advenait si, sous les hypothèses de la proposition 6.2.1, pour toute fonction Hölderienne f il existait un point x_0 et un entier n tels que $|P_{\mathbf{e}}^n(it)f(x_0)|_{HS}$ soit loin de 1. Nous allons maintenant étudier l'autre alternative. C'est à dire le cas où il existe une fonction Hölderienne f telle que pour tout $x \in \mathbf{X}$, $|P_{\mathbf{e}}^n(it)f(x)|_{HS}$ reste proche de 1 assez longtemps.

Commençons par le cas extrême où nous n'avons pas simplement que $|f(x)|$ et $|P_{\mathbf{e}}(it)f(x)|$ sont proches de 1 mais nous avons que pour tout $x \in \mathbf{X}$, $|P_{\mathbf{e}}(it)f(x)| = |f(x)| = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{X}$, $P_{\mathbf{e}}(it)f(x)$ est une moyenne de nombres complexes de module 1 et donc, pour tout $x \in \mathbf{X}$ et $\rho_{\mathbf{e}}-$pt $g \in \mathbf{G}$,

$$e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) = P_{\mathbf{e}}(it)f(x) \tag{6.2.2}$$

En particulier, puisque par définition $\rho_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) > 0$, nous obtenons que pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$f(x) = e^{-it\sigma(\mathbf{e},x)} f(x) = P_{\mathbf{e}}(it)f(x)$$

et cela montre que pour tout $x \in \mathbf{X}$ et $\rho_{\mathbf{e}}-$pt $g \in \mathbf{G}$,

$$e^{-it\sigma(g,x)} = \frac{f(x)}{f(gx)}$$

et donc, $e^{-it\sigma}$ est un cobord (multiplicatif).

Dans le lemme suivant, nous quantifions ces arguments pour le cas où on n'a pas $|P_{\mathbf{e}}(it)f(x)| = |f(x)| = 1$ mais seulement $|P_{\mathbf{e}}(it)f(x)|, |f(x)| \geqslant 1-s$ pour un certain s qui sera choisi petit par la suite.

Lemme 6.2.7. *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1.*

Soit $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\xi(\mathbf{X})$ une fonction telle que $\|f\|_\infty \leqslant 1$ et soient x un point de $\mathbf{X}$ et $L \in \mathbb{N}^\star$.

Soit s tel que $1-s \leqslant |f(x)|_{HS}, |P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)|_{HS}$, alors on a que

$$\int_{\mathbf{G}} \left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx) - f(x)\right|^2_{HS} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star L}(g) \leqslant 2^{L+3}s$$

Démonstration. En développant l'expression suivante, nous pouvons calculer,

$$\begin{aligned} I(x) := & \int_{\mathbf{G}} \left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx) - P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)\right|^2_{HS} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star L}(g) \\ &= P^L_{\mathbf{e}}|f|^2_{HS}(x) + |P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)|^2_{HS} - 2|P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)|^2_{HS} \\ &\leqslant 1 - |P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)|^2_{HS} \leqslant 2s \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\rho_{\mathbf{e}}^{*L}(\mathbf{e}) \left|f(x) - P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)\right|^2_{HS} \leqslant \int_{\mathbf{G}} \left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx) - P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)\right|^2_{HS} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star L}(g) \leqslant 2s$$

Cela montre, en utilisant que $\rho_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) \geqslant 1/2$, que

$$\left|f(x) - P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)\right|_{HS} \leqslant \sqrt{2^{L+1}s}$$

Et donc, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbf{G}} \left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx) - f(x)\right|^2_{HS} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star L}(g)\right)^{1/2} &\leqslant \sqrt{I(x)} + \left|f(x) - P^L_{\mathbf{e}}(it)f(x)\right|_{HS} \\ &\leqslant \sqrt{2s} + \sqrt{2^{L+1}s} \leqslant \sqrt{2^{L+3}s} \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du lemme. □

Lemme 6.2.8. *Sous les hypothèses de la proposition 6.2.1.*

Pour tout α_1, β il existe α_2 tel que pour tout Δ il existe α_1', β' tels que pour tout $\sigma \in \mathcal{Z}^M$, et tout $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$, si l'hypothèse $\mathbf{H}(\alpha_1', \beta', \xi)$ n'est pas vérifiée alors il existe une fonction hölderienne $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\xi(\mathbf{X})$ avec $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$ telle que pour tout point $x \in \mathbf{X}$ dont la projection est $\Delta - \nu$-régulière à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$, on a

$$|f(x)|_{HS} \geqslant 1 - \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

et

$$\int_{\mathbf{G}} \left|e^{i\sigma(g,x)}f(gx) - f(x)\right|^2_{HS} \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{n(\beta,|t|)}(g) \leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

Démonstration. Fixons $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \Delta$ et prenons $\alpha_1' \in \mathbb{R}_+^\star$ dont nous spécifierons plus tard la valeur.

Si l'hypothèse $\mathbf{H}(\alpha_1', \beta, \xi)$ n'est pas vérifiée, alors il existe $f \in \mathcal{C}_\xi^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ avec $\|f\|_{(t)} \leqslant 1$ telle que pour tout $n \in [0, n(\beta, t)]$ et tout point $x \in \mathbf{X}$ $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$,

$$|P_{\mathbf{e}}(it)^n f(x)|_{HS} \geqslant 1 - \frac{1}{|t|^{\alpha_1'}}$$

En appliquant le lemme précédent, on trouve donc que

$$\int_{\mathbf{G}} \left| e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) - f(x) \right|_{HS}^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star n(\beta,t)} \leqslant \frac{2^{n(\beta,t)+3}}{|t|^{\alpha_1'}} \leqslant \frac{8}{|t|^{\alpha_1' - \beta \ln 2}}$$

Et cela montre donc le lemme si on prends $\alpha_1' > \beta \ln 2 + \alpha_1 + 3$ puisque nous avons par hypothèse que $|t| \geqslant 2$. $\square$

Les lemmes 6.2.6 et 6.2.8 montrent la proposition 6.2.1.

Chapitre 7

Propriétés diophantiennes dans les groupes linéaires

Résumé

Dans ce chapitre, nous montrons que les logarithmes des rayons spectraux des éléments des sous-groupes fortement irréductibles et proximaux de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ont de bonnes propriétés diophantiennes.

Nous montrons également une propriété de régularité inférieure de la mesure de probabilité stationnaire sur l'espace projectif pour la marche définie par l'action de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$. Nous verrons en effet que la mesure est inférieurement régulière à une certaine échelle en les points fixes attracteurs des éléments proximaux de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.

Cela nous permettra de contrôler, dans le théorème 7.1, l'opérateur $P(it)$ défini dans le chapitre 6 et intervenant dans l'étude du théorème de renouvellement dans le chapitre 8.

Sommaire

Dans $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, l'application qui a une matrice associe son rayon spectral n'est pas un morphisme de groupe (pour $d \geqslant 2$).

Dans un sous-semi-groupe Zariski-dense Γ de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, on peut construire des suites d'éléments (g_n) et (h_n) pour lesquelles on contrôle bien la différence entre le logarithme du rayon spectral de $g_n h_n$ et la somme de ceux de g_n et h_n (voir [Qui05]).

Dans ce chapitre, nous quantifions cette construction pour prouver un résultat technique qui permettra de valider les hypothèses de la proposition 6.2.1 et de démontrer ainsi le théorème 7.1 qui permet de contrôler l'opérateur de Markov perturbé.

Plus précisément, en étudiant le renouvellement dans $\mathbb{R}$ (voir [Car83]), nous constatons que la vitesse dépend d'une condition diophantienne et nous allons démontrer que son équivalent est toujours vérifié dans $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ pour les mesures fortement irréductibles et proximales ayant un moment exponentiel. Ce sera la

Proposition (7.3.7). *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Alors, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\liminf_{b \to \pm\infty} |b|^\alpha \int_{\mathbf{G}} \left| e^{ib\lambda_1(g)} - 1 \right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g) > 0$$

où nous avons noté $\lambda_1(g)$ le logarithme du rayon spectral de g et

$$n(\beta, b) = \lfloor \beta \ln |b| \rfloor$$

Nous rappelons qu'un élément g de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ est dit proximal si il admet un point fixe localement attracteur dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Nous montrerons la généricité des points inférieurement réguliers, autre condition que nous avons vu apparaître dans l'étude de l'opérateur perturbé, dans le

Corollaire (7.2.3). *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, fortement irréductible, proximale et admettant un moment exponentiel.*

Soit ν l'unique mesure de probabilité stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ (l'existence et l'unicité de ν sont montrées dans la proposition 6.1.5).

Alors, pour tout $M \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\Delta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$,

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| g \text{ est proximal et } \nu\left(B\left(V_g^+, e^{-Mn}\right)\right) \geqslant e^{-\Delta Mn}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

où V_g^+ est le point fixe localement attracteur de g dans $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et nous avons muni $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ de la distance usuelle (voir l'équation (7.1.1)).

Ces deux résultats nous permettront de démontrer le

Théorème 7.1. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe Γ fortement irréductible et proximal.*

Soit $(\mathbf{A}, \nu_{\mathbf{A}})$ un $\Gamma-$ensemble fini non vide muni de la mesure de probabilité uniforme sur lequel la marche aléatoire définie par ρ est irréductible et apériodique.

Soit $\sigma : \Gamma \times \mathbb{S}^{d-1} \to \mathbb{R}$ le cocycle défini pour $g \in \Gamma$ et $x \in \mathbb{S}^{d-1}$ par

$$\sigma(g,(x,a)) = \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}$$

et soit, pour $t \in \mathbb{R}$, $P(it)$ l'opérateur défini sur $\mathcal{C}^0(\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A})$ par

$$P(it)f(x,a) = \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx, ga) \mathrm{d}\rho(g)$$

Alors, pour tout $\gamma > 0$ assez petit et tout $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $C, L \in \mathbb{R}_+$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant t_0$,

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbf{A})} \leqslant C|t|^L$$

Démonstration. C'est une utilisation directe du lemme 7.2.4 et de la proposition 7.3.7 que l'on peut appliquer (avec la mesure $\rho_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\delta_{\mathbf{e}} + \frac{1}{2}\rho$) grâce aux lemmes 7.1.1 et 7.1.7 (remarquons que l'on peut supposer sans perte de généralité que $p = 1$ puisque cela revient à changer $P(it)$ en $P^p(it)$ et un contrôle de $(I_d - P^p(it))^{-1}$ donne un contrôle de $(I_d - P(it))^{-1}$ comme nous l'avons déjà utilisé dans le preuve du lemme 6.2.6). □

7.1 Notations et préliminaires

Nous commençons par fixer des notations qui seront utilisées dans le reste de la section.

7.1.1 Éléments proximaux de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$

Soit $(\mathbb{V}, \|\,.\,\|)$ un $\mathbb{R}-$espace-vectoriel de dimension finie d muni d'une norme euclidienne et d'une base orthonormée $(e_1, \dots, e_d)$.

On définit une distance sur $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ en notant, pour $X = \mathbb{R}x, Y = \mathbb{R}y \in \mathbb{P}(\mathbb{V})$,

$$d(X,Y) = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\|\|y\|} \tag{7.1.1}$$

Où nous avons étendu le produit scalaire de $\mathbb{V}$ à $\wedge^2\mathbb{V}$ en imposant que la base $(e_i \wedge e_j)_{1\leqslant i<j\leqslant l}$ soit orthonormée.

On définit également un accouplement entre $\mathbb{P}(\mathbb{V})$ et $\mathbb{P}(\mathbb{V}^*)$, en notant, pour $X = \mathbb{R}x \in \mathbb{V}$ et $Y = \mathbb{R}\varphi \in \mathbb{V}^*$,

$$\delta(X,Y) := \frac{|\varphi(x)|}{\|\varphi\|\|x\|} = \inf_{Y' \in Y^\perp} d(X, Y')$$

où $Y^\perp = \{Y' = \mathbb{R}y' \in Y | \varphi(y') = 0\}$.

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 9 de [BQ15] pour une preuve du lemme suivant qui montre que nous sommes bien dans le cadre développé dans le chapitre 6.

Lemme 7.1.1. *Pour tout $g \in \mathbf{G}$ et tout $X, Y \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$,*

$$d(gX, gY) \leqslant \|g\|^{2d} d(X, Y)$$

De plus, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $X, Y \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tout $g \in \mathbf{G}$,

$$|\sigma(g, X) - \sigma(g, Y)| \leqslant C \|g\|^C d(X, Y)$$

où on a noté, pour $X = \mathbb{R}x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$,

$$\sigma(g, X) = \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}$$

et donc, avec les notations du chapitre précédent, $\sigma \in \mathscr{Z}_N^C(\mathbb{P}(\mathbb{R}^d))$ où nous avons noté $N(g) = \|g\|$.

Un élément g de $\mathrm{SL}(\mathbb{V})$ est dit *proximal* si il admet un point fixe localement attracteur dans $\mathbb{P}(\mathbb{V})$. De manière équivalente, un élément proximal est un élément qui admet une unique valeur propre de module maximal et dont l'espace propre associé à cette valeur propre est une droite. Dans ce cas, cette valeur propre est réelle. On constate également qu'un élément g est proximal si et seulement si ${}^t g$ est proximal dans $\mathbb{V}^*$.

Si g est proximal, on note $V_g^+ \in \mathbb{P}(\mathbb{V})$ l'espace propre associé à son unique valeur propre de module maximal et $V_g^< \in \mathbb{P}(\mathbb{V}^*)$ la classe définie par le supplémentaire $g-$invariant de V_g^+ (ou encore, le point fixe localement attracteur de ${}^t g$ dans $\mathbb{V}^*$). Dans la suite, nous noterons toujours v_g^+ un représentant de V_g^+ dans $\mathbb{V}$ et $\varphi_g^<$ un représentant de $V_g^<$ dans $\mathbb{V}^*$ et nous nous arrangerons toujours pour que nos formules soient valides pour tout choix de représentant.

Pour tout $g \in \mathbf{G}$, on note $\lambda_1(g), \dots, \lambda_d(g)$ les logarithmes des modules des valeurs propres de g rangés en ordre décroissant et comptés avec multiplicité. Si g est proximal, nous avons par définition que $gv_g^+ = \varepsilon_1(g) e^{\lambda_1(g)} v_g^+$ où $\varepsilon_1(g) \in \{\pm 1\}$.

Pour un élément $g \in \mathrm{SL}(\mathbb{V})$, on choisit une décomposition de Cartan $g = k_g a_g l_g$. C'est-à-dire que $k_g, l_g \in \mathcal{O}(\mathbb{V})$ et a_g est une matrice diagonale

$$a_g = \begin{pmatrix} \kappa_1(g) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_d(g) \end{pmatrix}$$

où les $\kappa_i(g)$ sont les *valeurs singulières de* g, vérifient $\kappa_1(g) \geqslant \cdots \geqslant \kappa_d(g)$ et sont donnés par

$$\kappa_i(g) = \frac{\| \wedge^i g\|}{\| \wedge^{i-1} g\|}$$

où nous avons noté $\wedge^i g$ l'endomorphisme défini par l'action de g dans $\bigwedge^i \mathbb{V}$ muni du produit scalaire hérité de celui de $\mathbb{V}$: c'est-à-dire que

$$\wedge^i g(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) = (gv_1) \wedge \cdots \wedge (gv_i)$$

De plus, nous notons

$$\kappa_{1,2}(g) = \frac{\kappa_2(g)}{\kappa_1(g)} = \frac{\| \wedge^2 g\|}{\|g\|^2}$$

Finalement, pour un élément $g \in \mathbf{G}$ dont on a choisi une décomposition de Cartan $g = k_g a_g l_g$, on note

$$x_g^M = k_g e_1, \quad X_g^M = \mathbb{R} x_g^M, \quad y_g^m = {}^t l_g e_1^* \text{ et } Y_g^m = \mathbb{R} y_g^m$$

Lemme 7.1.2. *Soit* $\mathbb{V} = \mathbb{R}^d$ *muni d'une norme euclidienne,* g *un élément de* $\mathrm{SL}(\mathbb{V})$*,* $X = \mathbb{R}x \in \mathbb{P}(\mathbb{V})$*,* $Y = \mathbb{R}\varphi \in \mathbb{P}(\mathbb{V}^*)$*.*

Alors,

1.
$$\delta(X, Y_g^m) \leqslant \frac{\|gx\|}{\|g\|\|x\|} \leqslant \delta(X, Y_g^m) + \kappa_{1,2}(g)$$

2.
$$\delta(X_g^M, Y) \leqslant \frac{\|{}^t g\varphi\|}{\|g\|\|\varphi\|} \leqslant \delta(X_g^M, Y) + \kappa_{1,2}(g)$$

3.
$$d(gX, X_g^M)\delta(X, Y_g^m) \leqslant \kappa_{1,2}(g)$$

Démonstration. La norme étant supposée euclidienne, nous pouvons supposer sans perte de généralité que g est la matrice diagonale $(\kappa_1(g), \dots, \kappa_d(g))$. Nous écrivons $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{Vect}(e_1)$ et $x_2 \in \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_d)$.

Alors,

$$gx_1 = \kappa_1(g)x_1 \text{ et } \|gx_2\| \leqslant \kappa_2(g)\|x_2\|$$

et donc, en utilisant que $\kappa_1(g) = \|g\|$, nous avons que

$$\frac{\|x_1\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\|gx\|}{\|g\|\|x\|} \leqslant \frac{\|x_1\|}{\|x\|} + \kappa_{1,2}(g)\frac{\|x_2\|}{\|x\|}$$

Finalement,

$$\frac{\|x_1\|}{\|x\|} = d(X, \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_d)) = \delta(X, Y_g^m)$$

et cela montre la première inégalité.

La deuxième inégalité se démontre comme la première en travaillant dans l'espace dual.

Finalement, la dernière inégalité vient de ce que

$$d(gX, X_g^M)\delta(X, Y_g^m) = \frac{\|gx_2\|}{\|gx\|}\frac{\|x_1\|}{\|x\|} \leqslant \frac{\kappa_2(g)}{\kappa_1(g)} = \kappa_{1,2}(g) \qquad \square$$

Ultérieurement, nous aurons à contrôler la décomposition en valeurs singulières de produits d'éléments de $\mathbf{G}$. Pour cela, nous utiliserons le

Lemme 7.1.3. *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 2$, tout $\varepsilon \in]0, 1/4]$, pour tout $g_1, \dots, g_p \in \mathbf{G}$ avec $\kappa_{1,2}(g_i) \leqslant \varepsilon^3$, $\delta(X_{g_{i+1}}^M, Y_{g_i}^m) \geqslant 2\varepsilon$ et $\delta(X_{g_i}^M, Y_{g_{i+1}}^m) \geqslant 2\varepsilon$, nous avons que*

$$\kappa_1(g_p \dots g_1) \geqslant \varepsilon^{p-1}\kappa_1(g_p)\dots\kappa_1(g_1), \quad \kappa_{1,2}(g_p \dots g_1) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g_1)\dots\kappa_{1,2}(g_p)}{\varepsilon^{2(p-1)}}$$

et,

$$d(X_{g_p\dots g_1}^M, X_{g_p}^M) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g_p)}{\varepsilon}, \quad d(Y_{g_p\dots g_1}^m, Y_{g_1}^m) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g_1)}{\varepsilon}$$

Démonstration. D'après le lemme 7.1.2, nous avons que pour tout $(g_i) \in \mathbf{G}^p$ et tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, en notant $X = \mathbb{R}x$,

$$\begin{aligned}\|g_p \dots g_1 x\| &\geqslant \|g_p\|\|g_{p-1}\dots g_1 x\|\delta(g_{p-1}\dots g_1 X, Y_{g_p}^m) \\ &\geqslant \|g_p\|\dots\|g_1\|\|x\|\delta(g_{p-1}\dots g_1 X, Y_{g_p}^m)\dots\delta(X, Y_{g_1}^m)\end{aligned}$$

Par ailleurs, en prenant x orthogonal à $Y_{g_1}^m$, nous avons que pour tout $l \in [1, p]$,

$$d(g_{l-1}\dots g_1 X, Y_{g_l}^m) \geqslant \frac{l+1}{l}\varepsilon$$

en effet, cela est vrai pour $l = 1$ par hypothèse et par récurrence, nous avons que pour tout $l \in [1, p-1]$,

$$d(g_l \dots g_1 X, X_{g_l}^M) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g_l)}{d(g_{l-1}\dots g_1 X, Y_{g_l}^m)} \leqslant \frac{l}{l+1}\varepsilon^2 \leqslant \frac{l}{l+1}\varepsilon$$

et donc,

$$\delta(g_l \dots g_1 X, Y_{g_{l+1}}^m) \geqslant \varepsilon\left(2 - \frac{l}{l+1}\right) = \frac{l+2}{l+1}\varepsilon$$

Cela montre donc, que

$$\frac{\|g_p \dots g_1 x\|}{\|x\|} \geqslant \frac{p}{2}\|g_p\|\dots\|g_1\|\varepsilon^{p-1}$$

et ainsi,

$$\kappa_1(g_p\dots g_1)\geqslant \frac{p}{2}\varepsilon^{p-1}\kappa_1(g_p)\dots\kappa_1(g_1)$$

De plus, en utilisant la sous-multiplicativité de la fonction $\kappa_1\kappa_2$ et que $\kappa_{1,2}(g_i)\leqslant\varepsilon^3$, on trouve que

$$\begin{aligned}\kappa_{1,2}(g_p\dots g_1)&=\frac{\kappa_2(g_p\dots g_1)\kappa_1(g_p\dots g_1)}{\kappa_1(g_p\dots g_1)^2}\leqslant\frac{4}{p^2\varepsilon^{2(p-1)}}\kappa_{1,2}(g_1)\dots\kappa_{1,2}(g_p)\\&\leqslant\frac{4}{p^2}\varepsilon^{p-1}\kappa_{1,2}(g_p)\end{aligned}$$

Enfin, en utilisant toujours le lemme 7.1.2, on a que

$$\delta(X,Y^m_{g_p\dots g_1})+\kappa_{1,2}(g_p\dots g_1)\geqslant\frac{p}{2}\varepsilon^{p-1}$$

et donc,

$$\delta(X,Y^m_{g_p\dots g_1})\geqslant\frac{p}{2}\varepsilon^{p-1}-\frac{4}{p^2}\varepsilon^{p+2}=\frac{p}{2}\varepsilon^{p-1}\left(1-\frac{8}{p^3}\varepsilon^3\right)$$

et donc,

$$d(g_p\dots g_1X,X^M_{g_p\dots g_1})\leqslant\frac{\kappa_{1,2}(g_p\dots g_1)}{\delta(X,Y^m_{g_p\dots g_1})}\leqslant\frac{2}{p}\frac{\kappa_{1,2}(g_p)}{1-8\varepsilon^3/p^3}$$

et donc,

$$\begin{aligned}d(X^M_{g_p\dots g_1},X^M_{g_p})&\leqslant\frac{p}{p+1}\frac{\kappa_{1,2}(g_p)}{\varepsilon}+\frac{2}{p}\frac{\kappa_{1,2}(g_p)}{(1-8\varepsilon^3/p^3)}\\&\leqslant\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}\left(\frac{p}{p+1}+\frac{2\varepsilon}{p(1-8\varepsilon^3/p^3)}\right)\end{aligned}$$

Ce qui montre la troisième inégalite puisque pour $\varepsilon\in\,]0,1/4]$ et $p\geqslant 2$, $\frac{2\varepsilon}{p(1-8\varepsilon^3/p^3)}\leqslant\frac{1}{p+1}$.

Pour avoir le contrôle de $d(Y^m_{g_p\dots g_1},Y^m_{g_1})$, nous pouvons faire les mêmes calculs dans l'espace dual. □

Le lemme suivant nous permettra de montrer, en connaissant la décomposition en valeurs singulières d'un élément g de $\mathbf{G}$, que cet élément est proximal et d'avoir un contrôle sur son espace propre associé à sa valeur propre dominante V_g^+ et son supplémentaire $g-$stable $V_g^<$.

Lemme 7.1.4. *Pour tout $\varepsilon\in\,]0,1/4]$ et tout élément g de $\mathbf{G}$, si $\kappa_{1,2}(g)\leqslant\varepsilon^3$ et $\delta(X_g^M,Y_g^m)\geqslant 2\varepsilon$ alors g est proximal et*

$$d(V_g^+,X_g^M)\leqslant\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon},\quad d(V_g^<,Y_g^m)\leqslant\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}$$

De plus,

$$e^{\lambda_1(g)} \geqslant \kappa_1(g)\delta(X_g^M, Y_g^m) \text{ et } \|g_{|_{V_g^<}}\| \leqslant \frac{2\kappa_2(g)}{\varepsilon}$$

Démonstration. Les trois premières inégalités viennent du lemme 13.14 de [BQ15].

Pour montrer que la norme de g restreint à $V_g^<$ est contrôlée par $\kappa_2(g)$, on remarque que d'après le lemme 7.1.2, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, en notant $X = \mathbb{R}x$, on a que

$$\frac{\|gx\|}{\|x\|} \leqslant \kappa_1(g)\delta(X, Y_g^m) + \kappa_2(g)$$

or, pour $X \in V_g^<$, on a que

$$\delta(X, Y_g^m) \leqslant d(V_g^<, Y_g^m) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}$$

et donc, pour tout $x \in V_g^< \setminus \{0\}$,

$$\frac{\|gx\|}{\|x\|} \leqslant \kappa_2(g)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{2\kappa_2(g)}{\varepsilon}$$

et nous obtenons ainsi la dernière majoration du lemme. □

À partir de maintenant, nous notons, pour $g \in \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ et $X = \mathbb{R}x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$,

$$\sigma(g, X) = \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|} \tag{7.1.2}$$

Lemme 7.1.5. *Pour tout $\varepsilon \in]0, 1/4]$, et tout élément g de $\mathbf{G}$, si $\kappa_{1,2}(g) \leqslant \varepsilon^4$ et $d(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, nous avons que pour tout $X \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ avec $\delta(X, V_g^<) \geqslant 2\varepsilon$,*

$$\left|\sigma(g, X) - \lambda_1(g) - \ln \frac{\delta(X, V_g^<)}{\delta(V_g^+, V_g^<)}\right| \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3}$$

De plus, pour tout $X, Y \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ avec $\delta(X, V_g^<), \delta(Y, V_g^<) \geqslant 2\varepsilon$,

$$d(gX, gY) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{4\varepsilon^4}$$

Démonstration. Nous notons $v_g^+, \varphi_g^<$ tels que $V_g^+ = \mathbb{R}v_g^+$ et $V_g^< = \mathbb{R}\varphi_g^<$.

Alors, d'après le lemme précédent,

$$\delta(V_g^+, V_g^<) \geqslant 2\varepsilon - 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon} \geqslant 2\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \geqslant \frac{3}{2}\varepsilon$$

Pour $x \in \mathbb{R}^d$, nous pouvons écrire

$$x = \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+ + x - \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+$$

et donc, comme $gv_g^+ = \varepsilon_1(g)e^{\lambda_1(g)}v_g^+$,

$$gx = \varepsilon_1(g)e^{\lambda_1(g)}\frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+ + g\left(x - \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+\right)$$

Mais, $x - \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+ \in V_g^<$ et donc, d'après le lemme 7.1.4,

$$\left\|g\left(x - \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+\right)\right\| \leqslant \frac{\kappa_2(g)}{\varepsilon}\left\|x - \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+\right\| \leqslant \frac{\kappa_2(g)}{\varepsilon}\frac{2\|x\|}{\delta(V_g^+, V_g^<)}$$

Ainsi, si $x \neq 0$,

$$e^{\lambda_1(g)}\frac{\delta(X, V_g^<)}{\delta(V_g^+, V_g^<)}(1 - \|u\|) \leqslant \frac{\|gx\|}{\|x\|} \leqslant e^{\lambda_1(g)}\frac{\delta(X, V_g^<)}{\delta(V_g^+, V_g^<)}(1 + \|u\|)$$

avec

$$u = \frac{\delta(V_g^+, V_g^<)}{e^{\lambda_1(g)}\delta(X, V_g^<)\|x\|}g\left(x - \frac{\varphi_g^<(x)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+\right) \text{ et } \|u\| \leqslant \frac{1}{e^{\lambda_1(g)}\delta(X, V_g^<)}\frac{4\kappa_2(g)}{\varepsilon}$$

Or, toujours d'après le lemme 7.1.4, $e^{\lambda_1(g)} \geqslant 2\|g\|\varepsilon$ et donc,

$$\frac{4\kappa_2(g)}{e^{\lambda_1(g)}\delta(X, V_g^<)\varepsilon} \leqslant \frac{2\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^2\delta(X, V_g^<)}$$

Ainsi, pour X avec $\delta(X, V_g^<) \geqslant 2\varepsilon$, on a que

$$\|u\| \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3} \leqslant \varepsilon$$

et

$$\ln(1 - \|u\|) \leqslant \sigma(g, X) - \lambda_1(g) - \ln\frac{\delta(X, V_g^<)}{\delta(V_g^+, V_g^<)} \leqslant \ln(1 + \|u\|)$$

et on obtient ainsi ce qu'il fallait démontrer en utilisant que

$$\|u\| \leqslant \min\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3}, \frac{1}{2}\right)$$

Finalement, pour tout $X, Y \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ avec $\delta(X, V_g^<), \delta(Y, V_g^<) \geqslant 2\varepsilon$,

$$\begin{aligned} d(gX, gY) &= \frac{\|\wedge^2 g(x \wedge y)\|}{\|gx\|\|gy\|} \leqslant \frac{\kappa_1(g)\kappa_2(g)\|x\|\|y\|}{\|gx\|\|gy\|} \leqslant \frac{\kappa_1(g)\kappa_2(g)}{e^{-2\lambda_1(g)}}\frac{4\delta(V_g^+, V_g^<)^2}{\delta(X, V_g^<)\delta(Y, V_g^<)} \\ &\leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{4\varepsilon^4} \end{aligned}$$

□

7.1.2 Généricité au sens de la mesure des éléments proximaux

Avant tout, nous rappelons que si ρ est une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment d'ordre 1 [1], alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$, appelés exposants de Lyapunov de ρ, vérifiant que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_d = 0$ et pour tout $i \in [1, d]$,

$$\frac{1}{n} \ln \| \wedge^i g_n \dots g_1 \| \to \lambda_1 + \cdots + \lambda_i \ \rho^{\otimes \mathbb{N}} - \text{p.s.}$$

De plus, si le support de ρ engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal, alors $\lambda_1 > \lambda_2$ (voir [GR85]).

Nous aurons besoin dans la suite de produire des éléments g de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ dans le support de ρ^{*n} et ayant de bonnes propriétés. Pour cela, nous utiliserons le lemme suivant dont le lecteur peut trouver une démonstration dans le chapitre 12 de [BQ15].

Lemme 7.1.6. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe proximal et fortement irréductible. Alors, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, on a que pour tout $x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ et tout $y \in \mathbb{P}((\mathbb{R}^d)^*)$,*

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \forall i \in [1, d],\ \left|\frac{1}{n}\kappa_i(g) - \lambda_i\right| \leqslant \varepsilon\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \delta(x, y_g^m) \geqslant 2e^{-\varepsilon n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| d(gx, x_g^M) \leqslant e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - \varepsilon)n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \delta(x_g^M, y) \geqslant 2e^{-\varepsilon n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \delta(gx, y) \geqslant 2e^{-\varepsilon n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \delta(x_g^M, y_g^m) \geqslant 2e^{-\varepsilon n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

De plus, nous avons, avec le lemme 7.1.1, le

Lemme 7.1.7. *Soit ρ une mesure de probabilité sur $\mathbf{G}$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathbf{G}$. Notons, pour $g \in \mathbf{G}$, $N(g) := \|g\|$.*

Alors, il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ est $(\rho, \gamma, 2d, N)-$contracté.

Démonstration. Nous renvoyons à [BL85] pour une preuve de ce résultat. □

---

1. $\int_{\mathbf{G}} \ln \|g\| \mathrm{d}\rho(g)$ est finie.

7.1.3 Un lemme de régularité des mesures face à la convolution

Nous commençons par un lemme technique que nous utiliserons ultérieurement et qui donne une forme de régularité des mesures sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ vis-à-vis de la convolution. Avec le langage que nous avons développé dans le chapitre précédent, ce lemme montre que pour toute mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel, il existe un paramètre Δ tel que pour tout n assez grand, tous les points de $\operatorname{supp} \rho^{*n}$ sont $\Delta-$réguliers à l'échelle $e^{-t_2 n}$ sauf un ensemble de mesure exponentiellement petite.

Lemme 7.1.8. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel.*

Alors, pour tout $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $t_3 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$, nous avons

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \rho^{*n}\left(B(g, e^{-t_2 n})\right) \geqslant e^{-t_3 n}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-t_1 n}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g)$ est fini et fixons un $n \in \mathbb{N}$. D'après l'inégalité de Markov, on a, pour tout $M \in \mathbb{R}_+$,

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| \|g\| \geqslant e^{Mn}\right\}\right) \leqslant e^{-\varepsilon M n} \int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant \left(e^{-\varepsilon M} \int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g)\right)^n$$

et donc, en notant $\widetilde{\Omega}_n = \left\{g \in \mathbf{G} \middle| \|g\| \leqslant e^{Mn}\right\}$, on a que

$$\rho^{*n}\left(\widetilde{\Omega}_n^c\right) \leqslant \left(e^{-\varepsilon M} \int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g)\right)^n$$

Par ailleurs, il existe une constante $C(d)$ ne dépendant que de la dimension d et $g_1, \dots g_L \in \widetilde{\Omega}_n$ tels que

$$\widetilde{\Omega}_n \subset \bigcup_{i=1}^{L} B(g_i, e^{-t_2 n}/2)$$

et $L \leqslant C(d) e^{(M+t_2)d^2 n}$. Notons, pour $K \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbf{G}_n = \left\{g \in \{g_1, \dots, g_L\} \middle| \rho^{*n}(B(g, e^{-t_2 n}/2)) \geqslant e^{-Kn}\right\} \text{ et } \Omega_n = \bigcup_{g \in G_n} B(g, e^{-t_2 n}/2)$$

Alors, pour $h \in \Omega_n$, il existe $g \in \mathbf{G}_n$ tel que $d(g, h) \leqslant e^{-t_2 n}/2$ et donc,

$$B(h, e^{-t_2 n}) \supset B(g, e^{-t_2 n}/2)$$

et ainsi,

$$\rho^{*n}(B(h, e^{-t_2 n})) \geqslant \rho^{*n}(B(g, e^{-t_2 n}/2)) \geqslant e^{-Kn}$$

Finalement, comme ρ est une mesure de probabilité, nous avons que

$$1 = \rho^{*n}\left(\widetilde{\Omega}_n^c\right) + \rho^{*n}\left(\Omega_n\right) + \rho^{*n}\left(\widetilde{\Omega}_n \setminus \Omega_n\right)$$

mais, par définition,

$$\rho^{*n}\left(\widetilde{\Omega}_n \setminus \Omega_n\right) \leqslant Le^{-Kn}$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \rho^{*n}(\Omega_n) &\geqslant 1 - \left(e^{-\varepsilon M}\int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g)\right)^n - Le^{-Kn} \\ &\geqslant 1 - \left(e^{-\varepsilon M}\int_{\mathbf{G}} \|g\|^\varepsilon \mathrm{d}\rho(g)\right)^n - C(d)e^{-Kn}e^{(M+t_2)d^2 n} \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme car nous pouvons prendre K et M aussi grands qu'on le veut. □

7.2 Points réguliers dans l'espace projectif

> Dans ce paragraphe, nous étudions la régularité inférieure de la mesure stationnaire sur l'espace projectif en les points fixes des éléments proximaux génériques au sens de la mesure.

Dans notre étude de la perturbation des opérateurs de Markov sur des espaces compacts (le chapitre 6), nous utilisions une hypothèse de régularité des points considérés par rapport à une mesure stationnaire.

Nous rappelons que étant donné un espace métrique $(\mathbf{X}, d)$ muni d'une mesure borélienne ν, nous disons qu'un point x de $\mathbf{X}$ est $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle r où $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Delta \in \mathbb{R}_+$, si

$$\nu(B(x,r)) \geqslant r^\Delta$$

Nous allons à présent montrer que dans le cas d'un sous-groupe fortement irréductible et proximal de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, les points fixes des éléments proximaux sont réguliers.

Pour commencer, il nous faut énoncer le

Lemme 7.2.1. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$ dont le support engendre un sous-semi-groupe T_ρ fortement irréductible et proximal.*

Alors il existe une unique mesure borélienne de probabilité ν sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ qui soit P_ρ-stationnaire.

De plus, pour tout élément proximal $g \in T_\rho$, on a $V_g^+ \in \operatorname{supp} \nu$.

Démonstration. L'existence et l'unicité de la mesure de probabilité stationnaire ν viennent de [GR85].

Pour démontrer la fin du lemme, notons que pour tout élément proximal $g \in T_\rho$, il existe $X \in \operatorname{supp}\nu$ tel que $X \notin V_g^<$. En effet, si non, on aurait un $g \in T_\rho$ tel que $\operatorname{supp}\nu \subset V_g^<$ mais cela est impossible car nous avons supposé que T_ρ est fortement irréductible.

Par ailleurs, pour tout élément proximal $g \in T_\rho$ et tout $X \notin V_g^<$, on a que

$$g^n X \to V_g^+$$

et comme $\operatorname{supp}\nu$ est fermé et $T_\rho-$invariant, cela montre que $V_g^+ \in \operatorname{supp}\nu$. □

Nous pouvons maintenant démontrer la régularité inférieure de la mesure de probabilité stationnaire dans la

Proposition 7.2.2. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Soit ν l'unique mesure de probabilité stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ assez petit, on a que pour tout $g \in \mathbf{G}$ avec $\kappa_{1,2}(g) \leqslant \varepsilon^4$ et $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, g est proximal et

$$\nu(B(V_g^+, (\kappa_{1,2}(g)/\varepsilon^4)^m) \geqslant \frac{1}{2}\left(\rho^{*n}\left(B(g,r)\right)\right)^m$$

où nous avons noté

$$r = \kappa_1(g)^{-(1+d)m}$$

Démonstration. Soit $\varepsilon \in]0,1/4]$ et $g \in \mathbf{G}$ tel que $\kappa_{1,2}(g) \leqslant \varepsilon^3$ et $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$.

D'après le lemme 7.1.4, g est proximal. De plus, en utilisant la $\rho-$stationnarité de la mesure ν on a que pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\nu(B(V_g^+, \kappa_{1,2}(g)^m)) &= \int_{\mathbf{X}} \mathbb{1}_{B(V_g^+, \kappa_{1,2}(g)^m)}(X)\mathrm{d}\nu(X) \\
&= \int_{\mathbf{X}}\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{B(V_g^+, \kappa_{1,2}(g)^m)}(hX)\mathrm{d}\rho^{*mn}(h)\mathrm{d}\nu(X) \\
&= \int_{\mathbf{X}} \rho^{*mn}\left(\left\{h \middle| hX \in B(V_g^+, \kappa_{1,2}(g)^m)\right\}\right)\mathrm{d}\nu(X) \\
&\geqslant \int_{\mathbf{X}} \mathbb{1}_{\delta(X, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon}\rho^{*mn}\left(\left\{h \middle| hX \in B(V_g^+, \kappa_{1,2}(g)^m)\right\}\right)\mathrm{d}\nu(X)
\end{aligned}$$

Or, nous avons vu dans le lemme 7.1.5 que si $X \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ est tel que $\delta(X, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, alors

$$d(g^m X, V_g^+) = d(g^m X, g^m V_g^+) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{4\varepsilon^4} d(g^{m-1}X, V_g^+) \leqslant \left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{4\varepsilon^4}\right)^m$$

où nous avons utilisé que $gV_g^+ = V_g^+$.

De plus, si $r \in]0,1]$ alors pour tout $h_1, \dots, h_m \in B(g,r)$ nous avons

$$\|g^m - h_1 \dots h_m\| \leqslant \|g - h_1\| \|g\|^{m-1} + \|h_1\| \|g^{m-1} - h_2 \dots h_m\| \leqslant m(2\|g\|)^{m-1} r$$

et donc,

$$d(h_1 \dots h_m X, V_g^+) \leqslant \|g^m - h_1 \dots h_m\| + d(g^m X, V_g^+) \leqslant m(2\|g\|)^{m-1} r + \left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{4\varepsilon^4}\right)^m$$

Et donc, si $r = \kappa_1(g)^{-(1+d)m}$, alors, en utilisant que $\kappa_1(g) = \|g\|$, $\kappa_2(g) \geqslant \kappa_1(g)^{1-d}$ (puisque $\kappa_1(g) \dots \kappa_d(g) = 1$ et $\kappa_1(g) \geqslant \kappa_2(g) \geqslant \dots \geqslant \kappa_d(g)$), $\kappa_{1,2}(g) = \kappa_2(g)/\kappa_1(g)$, on a que

$$\frac{1}{m}\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{8\|g\|\varepsilon^4}\right)^m \geqslant \kappa_1(g)^{-(1+d)m} \frac{1}{m}\left(\frac{1}{8\varepsilon^4}\right)^m$$

et on peut toujours supposer que ε est assez petit pour que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{m}(8\varepsilon^4)^{-m} \geqslant 1$.

Nous obtenons ainsi que, pour tout $h_1, \dots, h_m \in B(g,r)$,

$$d(h_m \dots h_1 X, V_g^+) \leqslant 2\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{4\varepsilon^4}\right)^m \leqslant \left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^4}\right)^m$$

Ainsi, pour tout $X \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\delta(X, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$,

$$\rho^{*mn}\left(\left\{h \middle| hx \in B(V_g^+, (\kappa_{1,2}(g)/\varepsilon^4)^m)\right\}\right) \geqslant \left(\rho^{*n}\left(B\left(g,r\right)\right)\right)^m$$

ce qui prouve, que pour tout $g \in \mathbf{G}$ tel que $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$ et $\kappa_{1,2}(g) \leqslant \varepsilon^3$, nous avons que

$$\begin{aligned} \nu(B(V_g^+, (\kappa_{1,2}(g)/\varepsilon^4)^m)) &\geqslant \left(\rho^{*n} B(g,r)\right)^m \nu\left(\left\{X \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \middle| \delta(X, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon\right\}\right) \\ &\geqslant \left(\rho^{*n} B(g,r)\right)^m \left(1 - (2\varepsilon)^c\right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la régularité supérieure de la mesure ν (voir le chapitre 12 de [BQ15]) pour dire que pour une certaine constante c et si ε est assez petit,

$$\nu(X | \delta(X, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon) \geqslant 1 - (2\varepsilon)^c. \qquad \square$$

Corollaire 7.2.3. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Soit ν l'unique mesure de probabilité stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Alors, pour tout $M \in \mathbb{N}^*$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $\Delta \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$,

$$\rho^{*n}\left(\left\{g \in \mathbf{G} \middle| g \text{ est proximal et } \nu\left(B\left(V_g^+, e^{-Mn}\right)\right) \geqslant e^{-\Delta Mn}\right\}\right) \geqslant 1 - e^{-tn}$$

Démonstration. Soient $m \in \mathbb{N}$, $0 < \varepsilon < (\lambda_1 - \lambda_2)/4$ et $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 - 3\varepsilon$. D'après la proposition 7.2.2, on a que pour tout n assez grand et tout $g \in \mathbf{G}$ tel que $\kappa_{1,2}(g) \leqslant e^{-\lambda n}$ et $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2e^{-\varepsilon n}$,

$$\nu(B(g, e^{-m\varepsilon n})) \geqslant \frac{1}{2}\left(\rho^{*n}(B(g, e^{-(\lambda_1+\varepsilon)(1+d)mn}))\right)^m$$

En particulier, si on prend $m \geqslant M/\varepsilon$, alors

$$\nu(B(g, e^{-Mn})) \geqslant \frac{1}{2}\left(\rho^{*n}(B(g, e^{-(\lambda_1+\varepsilon)(1+d)mn}))\right)^m$$

Pour conclure, nous utilisons que de tels éléments g avec $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2e^{-\varepsilon n}$ et $\kappa_{1,2}(g) \leqslant e^{-\lambda n}$ sont génériques d'après le lemme 7.1.6, comme les éléments pour lesquels nous avons une bonne minoration de $B(g, e^{-(\lambda_1+\varepsilon)(1+d)mn})$ d'après le lemme 7.1.8. □

Maintenant, nous utilisons cette propriété de régularité pour passer d'une condition dans la proposition 6.2.1 où l'action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X}$ intervient à une condition où seul le groupe $\mathbf{G}$ intervient.

Lemme 7.2.4. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$, ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un groupe fortement irréductible et proximal.*

Soient $\mathbf{X} = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A}$ et $\sigma : \mathbf{G} \times \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ le cocycle défini pour $g \in \mathbf{G}$ et $X = \mathbb{R}x \in \mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$ par

$$\sigma(g, X) = \ln \frac{\|gx\|}{\|x\|}$$

que l'on étends à $\mathbf{X}$ en notant, pour $(x, a) \in \mathbf{X}$, $\sigma(g, (x, a)) = \sigma(g, \mathbb{R}x)$.

Soit ν l'unique mesure P_ρ−stationnaire sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ où nous avons noté $\mathbf{H} = \{I_d, \vartheta\}$ où ϑ est l'involution de $\mathbf{X}$ qui est l'application antipodale sur $\mathbb{S}^{d-1}$ et l'identité sur $\mathbf{A}$ (l'existence et l'unicité de ν sont données par la proposition 6.1.5).

Pour tout $\alpha, t_0, t_2, t_3, \beta, \Delta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha_2, C, L \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant t_0$, si

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbf{A})} \geqslant C|t|^L$$

Alors,

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\left\{\substack{g \text{ est proximal et} \\ V_g^+ \text{ est } \Delta-\nu\text{-régulier à l'échelle } |t|^{-\alpha_2}}\right\}} \left|e^{-2i|\mathbf{A}|t\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*n(\beta,t)}(g) \leqslant \frac{1}{|t|^\alpha}$$

où nous avons noté $n(\beta, t) = \lfloor \beta \ln |t| \rfloor$.

Démonstration. Quitte à remplacer σ par $\sigma_0 = t_0\sigma/2$ et t par $2t/t_0$, on peut supposer que $|t| \geqslant 2$.

Notons que $\mathbf{H}$ étant isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ses représentations unitaires irréductibles sont de dimension 1 et la décomposition du lemme 6.1.21 n'est que la décomposition en partie paire et partie impaire.

Alors, en appliquant la proposition 6.2.1, pour tout $\alpha_1, \beta, \Delta \in \mathbb{R}_+^*$, il existe α_2, C, L tels que si

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbf{A})} \geqslant C|t|^L$$

alors, il existe $\xi \in \widehat{\mathbf{H}}$ et une fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\xi(\mathbf{X})$ avec $\|f\|_\infty \leqslant C$ et $m_\gamma(f) \leqslant C|t|$ telle que pour tout point x de $\mathbf{X}$ dont la projection sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $\Delta - \nu$-régulière à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$, on ait

$$|f(x)| \geqslant \frac{1}{2}$$

et

$$\int_{\mathbf{G}} \left| e^{-it\sigma(g,x)} f(gx) - f(x) \right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{\star n(\beta,t)}(g) \leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

où l'on a noté

$$n(\beta,t) = \lfloor \beta \ln |t| \rfloor$$

et $\rho_{\mathbf{e}}$ est la mesure associée à la marche ralentie (voir le paragraphe 6.1.3).

Le principe de la démonstration est de faire dépendre le point x dans l'intégrale du point g tiré selon la mesure $\rho_{\mathbf{e}}^{*n(\beta,t)}$ pour pouvoir prendre $x = V_g^+$ car alors $gX = X$ et $\sigma(g,X) = \lambda_1(g)$.

Pour cela, nous allons dans un premier temps obtenir un contrôle valable pour tout point x et tout point g sauf sur un ensemble de mesure exponentiellement petite, choisir le x que l'on veut et puis réintégrer le résultat. Le prix à payer pour cela est de passer de α à α_1.

Notons pour simplifier les notations $n = n(\beta,t)$.

On note, pour $t_2, t_3 \in \mathbb{R}_+^*$ dont nous déterminerons les valeurs ultérieurement,

$$G_n = \left\{ g \in \mathbf{G} \;\middle|\; \begin{array}{l} g \text{ est proximal, } V_g^+ \text{ est } \Delta - \nu\text{-régulier à l'échelle } |t|^{-\alpha_2} \text{ et} \\ \rho^{*n}(B(g, e^{-t_2 n})) \geqslant e^{-t_3 n} \end{array} \right\}$$

Alors, pour tout $g \in G_n$ et tout x qui est $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$,

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{h\in B(g,e^{-t_2 n})} \left| e^{-it\sigma(h,x)} f(hx) - f(x) \right|^2 \mathrm{d}\rho^{*n}(h) \leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha_1}}$$

Et donc, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$\begin{aligned}
I_b(x) :&= \sqrt{\rho^{*n}(B(g,e^{-t_2 n}))}\left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx)-f(x)\right| \\
&\leqslant \left(\int_{B(g,e^{-t_2 n})}\left|e^{-it\sigma(h,x)}f(hx)-f(x)\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*n}(h)\right)^{1/2} \\
&\qquad + \left(\int_{B(g,e^{-t_2 n})}\left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx)-e^{-it\sigma(h,x)}f(hx)\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*n}(h)\right)^{1/2} \\
&\leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}\rho^{*n}(B(g,e^{-t_2 n}))}
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que, pour $h \in B(g,e^{-t_2 n})$, nous avons que

$$\begin{aligned}
\left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx)-e^{-it\sigma(h,x)}f(hx)\right| &\leqslant \left|e^{-it\sigma(h,x)}-e^{-it\sigma(g,x)}\right||f(gx)|+|f(hx)-f(gx)| \\
&\leqslant 2|t|^\gamma C\,|\sigma(g,x)-\sigma(h,x)|^\gamma + m_\gamma(f)d(hx,gx)^\gamma \\
&\leqslant C'|t|e^{-t_2\gamma n}
\end{aligned}$$

Pour une certaine constante C' dépendant de σ (pour plus de détails, nous renvoyons au calcul dans la preuve de la proposition 6.1.18).

Ainsi, nous obtenons que pour tout $g \in G_n$ et tout point x qui est $\Delta-\nu$-régulier à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$,

$$\left|e^{-it\sigma(g,x)}f(gx)-f(x)\right| \leqslant \frac{e^{t_3 n/2}}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}}$$

Notons maintenant, pour $x=(u,a)\in\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbf{A}$,

$$\varphi(x) = \prod_{a\in\mathbf{A}} f(u,a)f(-u,a)$$

Cette fonction est donc $\mathbf{H}-$invariante et de plus, on a que pour tout x dont la projection sur l'espace projectif est $\Delta-\nu$-régulière à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{-2it|\mathbf{A}|\sigma(g,x)}\varphi(gx)-\varphi(x)\right| &\leqslant \sum_{a\in\mathbf{A}}\sum_{h\in\mathbf{H}}\left|e^{-it\sigma(g,x)}\varphi(ghx)-\varphi(hx)\right| \\
&\leqslant 2|\mathbf{A}|\left(\frac{e^{t_3 n/2}}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}}\right)
\end{aligned}$$

Mais, maintenant, nous pouvons utiliser que par définition de G_n, V_g^+ est $\Delta-\nu$-régulier à l'échelle $|t|^{-\alpha_2}$ et donc, nous obtenons que pour tout $g\in G_n$,

$$\begin{aligned}
\left|e^{-2it|\mathbf{A}|\lambda_1(g)}-1\right||\varphi(V_g^+)| &= \left|e^{-2it|\mathbf{A}|\lambda_1(g)}\varphi_1(V_g^+)-\varphi_1(V_g^+)\right| \\
&\leqslant 2|\mathbf{A}|\left(\frac{e^{t_3 n/2}}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}}\right)
\end{aligned}$$

où nous avons identifié φ à une fonction sur l'espace projectif.

Et cela montre, en utilisant que $|\varphi(V_g^+)| \geqslant 2^{-2|\mathbf{A}|}$, que pour tout $g \in G_n$,

$$\left|e^{-2it|\mathbf{A}|\lambda_1(g)} - 1\right| \leqslant 2^{1+2|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}| \left(\frac{e^{t_3 n/2}}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}}\right)$$

Ainsi, nous obtenons que

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{G_n}(g) \left|e^{-2i|\mathbf{A}|t\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{*n(\beta,t)}(g) \leqslant 2^{1+2|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}| \left(\frac{e^{t_3 n/2}}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}}\right)$$

Par ailleurs, on note $C_{\mathbf{A}} = 2^{1+2|\mathbf{A}|}|\mathbf{A}|$ et

$$G_n^1 := \left\{g \in \mathbf{G} \middle| g \text{ est proximal, } V_g^+ \text{ est } \Delta - \nu\text{-régulier à l'échelle } |t|^{-\alpha_2}\right\}$$

Et alors, nous avons que

$$\int_{G_n^1} \left|e^{-2i|\mathbf{A}|t\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{*n(\beta,t)}(g) \leqslant \int_{G_n} \left|e^{-2i|\mathbf{A}|t\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{*n(\beta,t)}(g) + 2\rho^{*n}(G_n^1 \backslash G_n)$$

Et donc, en utilisant le lemme 7.1.8, nous obtenons que pour tout t_1, t_2, il existe t_3 tel que pour tout n assez grand,

$$\int_{G_n^1} \left|e^{-2i|\mathbf{A}|t\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{*n(\beta,t)}(g) \leqslant C_{\mathbf{A}} \left(\frac{e^{t_3 n/2}}{|t|^{\alpha_1/2}} + \sqrt{C'|t|e^{-t_2\gamma n}}\right) + 2e^{-t_1 n}$$

Et donc, en prenant t_1 et t_2 assez grands ce qui impose une valeur de t_3, puis en prenant α_1 assez grand, et en utilisant que $|t| \geqslant 2$, on obtient que

$$\int_{G_n^1} \left|e^{-2i|\mathbf{A}|t\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho_{\mathbf{e}}^{*n(\beta,t)}(g) \leqslant \frac{1}{|t|^{\alpha}}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

7.3 Propriétés diophantiennes des longueurs de translation

Dans ce paragraphe, nous démontrons que pour des mesures sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal, les logarithmes des rayons spectraux vérifient une hypothèse diophantienne du même type que celle utilisée par Carlsson dans [Car83] pour l'étude du renouvellement dans $\mathbb{R}$.

Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$. Pour $g \in \mathbf{G}$, nous notons $\lambda_1(g)$ le logarithme du rayon spectral de g. Comme pour le renouvellement dans $\mathbb{R}$, l'étude du renouvellement dans $\mathbb{R}^d$ nécessite une hypothèse diophantienne. Cependant, nous allons montrer ici, en utilisant que l'on peut bien contrôler la différence entre $\lambda_1(gh)$ et $\lambda_1(g)+\lambda_1(h)$, que cette hypothèse est toujours vérifiée par les mesures admettant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe irréductible et proximal.

Premièrement, nous allons donner une estimation de la différence entre $\lambda_1(gh)$ et $\lambda_1(g)+\lambda_1(h)$ quand g et h sont des éléments proximaux de $\mathbf{G}$ étant en position générique l'un par rapport à l'autre.

Lemme 7.3.1. *Il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $\varepsilon \in]0, c_1]$ et tout $g, h \in \mathbf{G}$ avec $\kappa_{1,2}(g), \kappa_{1,2}(h) \leqslant \varepsilon^4$, $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, $\delta(X_h^M, Y_h^m) \geqslant 2\varepsilon$, $\delta(X_g^M, Y_h^m) \geqslant 2\varepsilon$ et $\delta(X_h^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, on a que*

$$\left|\lambda_1(g)+\lambda_1(h)-\lambda_1(gh)-\ln\frac{\delta(V_h^+,V_h^<)\delta(V_g^+,V_g^<)}{\delta(V_g^+,V_h^<)\delta(V_h^+,V_g^<)}\right| \leqslant c_2\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3}+\frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon^3}\right)$$

Remarque 7.3.2. Il faut bien voir que d'après le lemme 7.1.6, il y a beaucoup d'éléments g et h vérifiant les hypothèses du lemme dans le support de ρ^{*n}.

Démonstration. On prend pour commencer $c_1 = 1/4$ et $c_2 = 1$.

Premièrement, d'après le lemme 7.1.3,

$$\kappa_{1,2}(gh) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon^2}, \quad d(X_{gh}^M, X_g^M) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon} \text{ et } d(Y_{gh}^m, Y_h^m) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon}$$

et donc,

$$\kappa_{1,2}(gh) \leqslant \varepsilon^4 \text{ et } \delta(X_{gh}^M, Y_{gh}^m) \geqslant 2\varepsilon(1-\varepsilon) \geqslant \frac{3}{2}\varepsilon$$

on note $\varepsilon' = \frac{3}{4}\varepsilon$ et on a donc que $d(X_{gh}^M, Y_{gh}^m) \geqslant 2\varepsilon'$ et $\kappa_{1,2}(gh) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{4}{3}\right)^3 \varepsilon'^3 \leqslant \varepsilon'^3$.

Ainsi, d'après le lemme 7.1.4, gh est proximal et

$$d(V_{gh}^+, V_g^+) \leqslant d(V_{gh}^+, X_{gh}^M) + d(X_{gh}^M, X_g^M) + d(X_g^M, V_g^+) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(gh)}{\varepsilon'} + \frac{2\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}$$

et de même,

$$\begin{aligned} d(V_{gh}^<, V_h^<) &\leqslant d(V_{gh}^<, Y_{gh}^m) + d(Y_{gh}^m, Y_h^m) + d(Y_h^m, V_h^<) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(gh)}{\varepsilon'} + 2\frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon} \\ &\leqslant \frac{4}{3}\varepsilon^3 + 2\varepsilon^2 \leqslant 3\varepsilon^2 \end{aligned}$$

et donc,

$$\delta(V_h^+, V_{gh}^<) \geqslant 2\varepsilon - 3\varepsilon^2 = 2\varepsilon(1-3\varepsilon/2) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On note donc $\varepsilon'' = \frac{\varepsilon}{4}$ et alors, $\delta(V_h^+, V_{gh}^<) \geqslant 2\varepsilon''$ et $\kappa_{1,2}(gh) \leqslant 64c_1\varepsilon''^3$ donc, en supposant que $c_1 \leqslant \frac{1}{64}$, d'après le lemme 7.1.5,

$$\left|\sigma(gh, V_h^+) - \lambda_1(gh) - \ln\frac{\delta(V_h^+, V_{gh}^<)}{\delta(V_{gh}^+, V_{gh}^<)}\right| \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(gh)}{\varepsilon''^3} \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(h)\varepsilon}{\varepsilon''^3}$$

Et de plus, en utilisant la relation de cocycle, et le fait que par définition de V_h^+, $\sigma(h, V_h^+) = \lambda_1(h)$, nous avons que

$$\sigma(gh, V_h^+) = \sigma(g, hV_h^+) + \sigma(h, V_h^+) = \sigma(g, V_h^+) + \lambda_1(h)$$

et finalement, nous avons, encore avec le lemme 7.1.5, que

$$\left|\sigma(g, V_h^+) - \lambda_1(g) - \ln\frac{\delta(V_h^+, V_g^<)}{\delta(V_g^+, V_g^<)}\right| \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3}$$

Cela nous permet d'obtenir que

$$\left|\lambda_1(g) + \lambda_1(h) - \lambda_1(gh) - \ln\frac{\delta(V_h^+, V_{gh}^<)\delta(V_g^+, V_g^<)}{\delta(V_{gh}^+, V_{gh}^<)\delta(V_h^+, V_g^<)}\right| \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3} + 2^7\frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon^2}$$

Pour conclure, remarquons que

$$\left|\delta(V_h^+, V_{gh}^<) - \delta(V_h^+, V_h^<)\right| \leqslant d(V_h^<, V_{gh}^<) \leqslant 3\varepsilon^2 \text{ et } \delta(V_h^+, V_{gh}^<) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

donc, pour ε assez petit, on a que, pour une certaine constante c_3,

$$\left|\ln\frac{\delta(V_h^+, V_{gh}^<)}{\delta(V_h^+, V_h^<)}\right| \leqslant \frac{c_3}{\varepsilon} d(V_h^<, V_{gh}^<) \leqslant \frac{c_3}{\varepsilon}\left(\frac{\kappa_{1,2}(gh)}{\varepsilon'} + 2\frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon}\right)$$

De même, on peut contrôler $|\ln\delta(V_{gh}^+, V_{gh}^<) - \ln\delta(V_g^+, V_h^<)|$ et obtenir ce qu'il fallait démontrer. □

Nous aurons besoin d'un résultat de continuité de la décomposition en valeurs singulières. Nous démontrons dans ce but, le

Lemme 7.3.3. *Soit g un élément de $\mathbf{G}$.*
Alors, pour tout $h \in \mathbf{G}$,

$$d\left(X_h^M, X_g^M\right) \leqslant (2\|g-h\| + \kappa_{1,2}(g)), \quad d\left(Y_h^m, Y_g^m\right) \leqslant (2\|g-h\| + \kappa_{1,2}(g))$$

De plus, il existe des constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tout $\varepsilon \in]0, c_1]$, tout élément g de $\mathbf{G}$ avec $\kappa_{1,2}(g) \leqslant \varepsilon^3$ et $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, tout $r \in \mathbb{R}_+^*$ avec $r \leqslant \varepsilon^2\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^2}\right)^p$ et tout élément $f \in B(g^p, r)$,

$$\delta(X_f^M, Y_f^m) \geqslant \varepsilon, \quad d(X_f^M, X_g^M) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}, \quad d(Y_f^m, Y_g^m) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}$$

$$\kappa_1(f) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^{p-1}\kappa_1(g)^p, \quad \kappa_{1,2}(f) \leqslant \frac{16}{\varepsilon^{2(p-1)}}\kappa_{1,2}(g)^p$$

$$d(V_f^+, V_g^+) \leqslant c_2 \frac{\kappa_{1,2}(g)^p}{\varepsilon^{2p-1}} \text{ et } d(V_f^<, V_g^<) \leqslant c_2 \frac{\kappa_{1,2}(g)^p}{\varepsilon^{2p-1}}$$

Démonstration. Calculons de deux manières différents $g^t l_h e_1$.

Premièrement,

$$\begin{aligned}\kappa_1(h) x_h^M &= h^t l_h e_1 = g^t l_h e_1 + (h-g)^t l_h e_1 \\ &= \kappa_1(g) \langle {}^t l_h e_1, {}^t l_g e_1 \rangle x_g^M + u + (h-g)^t l_h e_1\end{aligned}$$

avec u tel que $\|u\| \leqslant \kappa_2(g)$.

Donc,

$$\begin{aligned}\kappa_1(h) \|x_h^M - \langle {}^t l_h e_1, {}^t l_g e_1 \rangle x_g^M\| &\leqslant |\kappa_1(g) - \kappa_1(h)| + \|u\| + \|g-h\| \\ &\leqslant \kappa_2(g) + 2\|g-h\|\end{aligned}$$

et comme $\|x_h^M\| = 1 = \|x_g^M\|$, on peut en déduire que

$$d(X_g^M, X_h^M) = \|x_g^M \wedge x_h^M\| = \left\| \left(x_h^M - \langle {}^t l_h e_1, {}^t l_g e_1 \rangle x_g^M \right) \wedge x_g^M \right\| \leqslant \kappa_{1,2}(g) + 2\frac{\|g-h\|}{\|g\|}$$

Cela nous permet d'obtenir la première partie du lemme puisque pour tout $g \in \mathbf{G}$, $\|g\| = \kappa_1(g) \geqslant 1$.

Pour le contrôle de $d(Y_g^m, Y_h^m)$, on fait la même chose dans l'espace dual.

Pour démontrer la fin, notons que d'après le lemme 7.1.3, nous avons que

$$\kappa_1(g^p) \geqslant \varepsilon^{p-1}\kappa_1(g)^p, \quad \kappa_{1,2}(g^p) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^{2(p-1)}}\kappa_{1,2}(g)^p$$

et

$$d(X_{g^p}^M, X_g^M) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}, \quad d(Y_{g^p}^m, Y_g^m) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}$$

Ainsi, pour $f \in B(g^p, r)$,

$$\begin{aligned}\delta(X_f^M, Y_f^m) &\geqslant 2\varepsilon - d(X_{g^p}^M, X_g^M) - d(Y_{g^p}^m, Y_g^m) - d(X_f^M, X_{g^p}^M) - d(Y_f^m, Y_{g^p}^m) \\ &\geqslant 2\varepsilon - 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon} - 2\left(2r + \kappa_{1,2}(g^p)\right) \\ &\geqslant \varepsilon(2 - 6\varepsilon)\end{aligned}$$

et donc, quitte à choisir un c_1 encore plus petit, nous avons que

$$\delta(X_f^M, Y_f^m) \geqslant \varepsilon$$

De plus,

$$\kappa_1(f) \geqslant \kappa_1(g^p) - r \geqslant \varepsilon^{p-1}\kappa_1(g)^p - \varepsilon^{p+2} \geqslant \varepsilon^{p-1}\kappa_1(g)^p\left(1 - \frac{\varepsilon^3}{\kappa_1(g)^p}\right)$$

Et en utilisant que $\kappa_1(g) \geqslant 1$ et $\varepsilon \leqslant c_1$, nous avons que, si c_1 est assez petit,

$$\kappa_1(f) \geqslant \varepsilon^{p-1}\kappa_1(g)^p$$

De plus, en utilisant que $\kappa_1(g)\kappa_2(g) = \kappa_1(\wedge^2 g)$, on a que

$$\kappa_1(f)\kappa_2(f) \leqslant \kappa_1(g^p)\kappa_2(g^p)+\|\wedge^2 g^p - \wedge^2 f\| \leqslant \kappa_1(g^p)\kappa_2(g^p)+(\kappa_1(g^p)+\kappa_1(f))\|f-g^p\|$$

donc,

$$\kappa_{1,2}(f) \leqslant \frac{\kappa_1(g^p)\kappa_2(g^p)}{\kappa_1(f)^2} + \frac{\kappa_1(g^p)+\kappa_1(f)}{\kappa_1(f)^2}\|g^p - f\| \leqslant \frac{16}{\varepsilon^{2(p-1)}}\kappa_{1,2}(g)^p \leqslant 16\varepsilon^{p+2}$$

et donc, si c_1 est assez petit, on a que $\kappa_{1,2}(f) \leqslant (\varepsilon/2)^3$, et donc, d'après le lemme 7.1.4 nous trouvons, que pour tout $f \in B(g^p, r)$, f est proximal et

$$d(V_f^+, X_f^M) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(f)}{\varepsilon} \text{ et } d(V_f^<, Y_f^m) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(f)}{\varepsilon}$$

Ainsi, en utilisant que $V_{g^p}^+ = V_g^+$, on trouve que

$$d(V_f^+, V_g^+) \leqslant d(V_f^+, X_f^M) + d(X_f^M, X_{g^p}^M) + d(X_{g^p}^M, V_g^+) \leqslant c_2\frac{\kappa_{1,2}(g)^p}{\varepsilon^{2p-1}}$$

pour une certaine constante c_2 universelle.

En travaillant de la même manière dans l'espace dual, on peut obtenir les mêmes inégalités pour $d(V_f^<, V_g^<)$ et terminer la preuve du lemme. □

Nous pouvons à présent évaluer la différence entre les logarithmes des rayons spectraux d'éléments de **G** bien choisis. Nous aimerions prendre des éléments g et h proximaux et étudier la différence entre le rayon spectral de g^pgh et la somme de ceux de g^p et gh (comme dans [Qui05]). Cependant, comme nous ne prendrons pas une mesure purement atomique sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, nous sommes obligés de prendre, non pas g^p mais une matrice dans un petit voisinage. C'est ce que nous faisons dans le

Lemme 7.3.4. *Il existe des constantes c_1, c_2, c_3 telles que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, tout $\varepsilon \in]0, c_1]$, tout $g \in \mathbf{G}$ avec $\kappa_{1,2}(g) \leqslant \varepsilon^5$ et $\delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$ on a que pour tout $h \in \mathbf{G}$ avec $\kappa_{1,2}(h) \leqslant \varepsilon^3$, $\delta(X_h^M, Y_h^m) \geqslant 2\varepsilon$, $\delta(X_h^M, Y_g^m) \geqslant 2\varepsilon$, $\delta(X_g^M, Y_h^m) \geqslant 2\varepsilon$ et tout $f \in \mathbf{G}$ tel que $\|g^p - f\| \leqslant \varepsilon^2\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}\right)^p$, on a que*

$$\left|\lambda_1(fgh) - \lambda_1(f) - \lambda_1(gh) - \ln\frac{\delta(V_g^+, V_g^<)\delta(gV_h^+, V_h^<)}{\delta(V_g^+, V_h^<)\delta(gV_h^+, V_g^<)}\right| \leqslant c_2\left(\frac{\kappa_{1,2}(g)^p}{\varepsilon^{2p}} + \frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon}\right)$$

De plus, si nous notons π_g la projection sur $V_g^<$ parallèlement à V_g^+. Alors, nous avons que si $d(g\pi_g X_h^M, Y_h^m) \geqslant 2\varepsilon$, $d(X_g^M, X_h^M) \geqslant 2\varepsilon$ et $\kappa_{1,2}(h)\kappa_1(g) \leqslant \frac{1}{2}\varepsilon^3$,

$$\frac{\varepsilon^3}{c_3\kappa_1(g)^d} \leqslant \left| \ln \frac{\delta(V_g^+, V_g^<)\delta(gV_h^+, V_h^<)}{\delta(V_g^+, V_h^<)\delta(gV_h^+, V_g^<)} \right| \leqslant c_3 \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^5}$$

Démonstration. Nous voulons appliquer le lemme 7.3.1 à f et à gh. Pour cela, nous allons dans un premier temps montrer que gh est proximal.

D'après le lemme 7.1.3, nous avons que

$$\kappa_{1,2}(gh) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon^2} \leqslant \varepsilon^4$$

et

$$d(X_{gh}^M, X_g^M) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon} \text{ et } d(Y_{gh}^m, Y_h^m) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon}$$

d'où,

$$\delta(X_{gh}^M, Y_{gh}^m) \geqslant \delta(X_g^M, Y_h^m) - d(X_{gh}^M, X_g^M) - d(Y_h^m, Y_{gh}^m) \geqslant 2\varepsilon(1-\varepsilon) \geqslant \frac{3}{2}\varepsilon$$

Et donc, pour c_1 assez petit, gh vérifie les hypothèses des lemmes 7.1.4 et 7.1.5 avec $\varepsilon' = \varepsilon/2$. Donc, gh est proximal et

$$d(V_{gh}^+, gV_h^+) = d(ghV_{gh}^+, ghV_h^+) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(gh)}{4\varepsilon'^4} \leqslant c_2 \frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon}$$

et

$$d(V_{gh}^<, V_h^<) \leqslant d(V_{gh}^<, Y_{gh}^m) + d(Y_{gh}^m, Y_h^m) + d(V_h^<, Y_h^m) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon} + \frac{\kappa_{1,2}(gh)}{\varepsilon}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 7.3.3, pour $f \in \mathbf{G}$ tel que $\|g^p - f\| \leqslant \varepsilon^2 \left(\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}\right)^p$, nous avons que

$$\delta(X_f^M, Y_f^m) \geqslant \varepsilon, \quad d(X_f^M, X_g^M) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}, \quad d(Y_f^m, Y_g^m) \leqslant 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon}$$

de plus,

$$\kappa_1(f) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon^{p-1}\kappa_1(g)^p, \quad \kappa_{1,2}(f) \leqslant \frac{16}{\varepsilon^{2(p-1)}}\kappa_{1,2}(g)^p$$

et

$$d(V_f^+, V_g^+) \leqslant c_2 \frac{\kappa_{1,2}(g)^p}{\varepsilon^{2p-1}} \text{ et } d(V_f^<, V_g^<) \leqslant c_2 \frac{\kappa_{1,2}(g)^p}{\varepsilon^{2p-1}}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\delta(X_f^M, Y_{gh}^m) &\geqslant \delta(X_g^M, Y_h^m) - d(X_f^M, X_g^M) - d(Y_h^m, Y_{gh}^m)\\ &\geqslant \varepsilon\left(2 - 2\frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon} - \frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon}\right)\\ &\geqslant \varepsilon\left(2 - 3\varepsilon^2\right)\end{aligned}$$

et donc, en choisissant un c_1 assez petit, nous avons que $\delta(X_f^M, Y_{gh}^m) \geqslant \varepsilon$ et de même, $\delta(X_{gh}^m, Y_g^m) \geqslant \varepsilon$. Ainsi, d'après le lemme 7.3.1,

$$\left|\lambda_1(f) + \lambda_1(gh) - \lambda_1(fgh) - \ln\frac{\delta(V_{gh}^+, V_{gh}^<)\delta(V_f^+, V_f^<)}{\delta(V_f^+, V_{gh}^<)\delta(V_{gh}^+, V_f^<)}\right| \leqslant c_2\left(\frac{\kappa_{1,2}(f)}{\varepsilon^2} + \frac{\kappa_{1,2}(gh)}{\varepsilon^2}\right)$$

Ce qui termine la preuve de la première partie du lemme puisque nous avons vu des contrôles de $d(V_{gh}^+, gV_h^+), d(V_f^+, V_g^+), d(V_f^<, V_g^<), d(V_{gh}^<, V_h^<)$.

Finalement, on a l'égalité

$$\begin{aligned}\frac{\delta(V_g^+, V_g^<)\delta(gV_h^+, V_h^<)}{\delta(V_g^+, V_h^<)\delta(gV_h^+, V_g^<)} &= \left|\frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(gv_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(gv_h^+)}\right|\\ &= \left|1 + \frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(gv_h^+) - \varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(gv_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(gv_h^+)}\right| \end{aligned} \tag{7.3.1}$$

et, comme

$$v_h^+ = \frac{\varphi_g^<(v_h^+)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+ + v_h^+ - \frac{\varphi_g^<(v_h^+)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+ = \frac{\varphi_g^<(v_h^+)}{\varphi_g^<(v_g^+)}v_g^+ + \pi_g(v_h^+)$$

où on a noté π_g la projection sur $V_g^<$ parallèlement à V_g^+, on a que

$$\varphi_g^<(gv_h^+) = \varepsilon_1(g)e^{\lambda_1(g)}\varphi_g^<(v_h^+)$$

et

$$\varphi_h^<(gv_h^+) = \varepsilon_1(g)e^{\lambda_1(g)}\frac{\varphi_g^<(v_h^+)}{\varphi_g^<(v_g^+)}\varphi_h^<(v_g^+) + \varphi_h^<\left(g\pi_g(v_h^+)\right)$$

et donc,

$$\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(gv_h^+) - \varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(gv_h^+) = \varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(g\pi_g v_h^+)$$

et donc, en remplaçant dans l'équation (7.3.1), on trouve que

$$\frac{\delta(V_g^+, V_g^<)\delta(gV_h^+, V_h^<)}{\delta(V_g^+, V_h^<)\delta(gV_h^+, V_g^<)} = \left|1 + \varepsilon_1(g)e^{-\lambda_1(g)}\frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(g\pi_g v_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)}\right|$$

De plus, en utilisant que $\pi_g v_h^+ \in V_g^<$, on a que

$$\|g\pi_g v_h^+\| \leqslant \frac{\kappa_2(g)}{\varepsilon}\|\pi_g\|\|v_h^+\| \leqslant \frac{\kappa_2(g)}{\varepsilon}\frac{2}{\delta(V_g^+, V_g^<)}\|v_h^+\| \leqslant \frac{2\kappa_2(g)}{\varepsilon^2}\|v_h^+\|$$

et donc, en utilisant que $e^{\lambda_1(g)} \geqslant 2\kappa_1(g)\varepsilon$, on a que

$$\left| e^{-\lambda_1(g)} \frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(g\pi_g v_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)} \right| \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon^3} \frac{\|\varphi_g^<\|\|v_g^+\|\|\varphi_h^<\|\|v_h^+\|}{|\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)|} \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)}{5\varepsilon^4}$$

De plus, on peut aussi calculer

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(g\pi_g v_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)} \right| &= \delta(V_g^+, V_g^<)\delta(g\pi_g V_h^+, V_h^<) \frac{\|\varphi_g^<\|\|v_g^+\|\|\varphi_h^<\|\|g\pi_g v_h^+\|}{|\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)|} \\
&\geqslant \delta(V_g^+, V_g^<)\delta(g\pi_g V_h^+, V_h^<) \frac{\|g\pi_g v_h^+\|}{\|v_h^+\|} \\
&\geqslant \delta(V_g^+, V_g^<)\delta(g\pi_g V_h^+, V_h^<) \frac{1}{\|g^{-1}\|} \frac{\|\pi_g v_h^+\|}{\|v_h^+\|} \qquad (7.3.2)
\end{aligned}$$

Finalement, comme $v_g^+ \wedge v_h^+ = v_g^+ \wedge \pi_g v_h^+$, on a

$$d(V_g^+, V_h^+) = \frac{\|v_g^+ \wedge v_h^+\|}{\|v_g^+\|\|v_h^+\|} = \frac{\|v_g^+ \wedge \pi_g v_h^+\|}{\|v_g^+\|\|v_h^+\|} \leqslant \frac{\|\pi_g v_h^+\|}{\|v_h^+\|}$$

et donc, en utilisant l'inégalité (7.3.2), on trouve que

$$\left| \frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(g\pi_g v_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)} \right| \geqslant \frac{1}{\|g^{-1}\|}\delta(V_g^+, V_g^<)\delta(g\pi_g V_h^+, V_h^<)d(V_g^+, V_h^+)$$

Pour conclure, on note que $\kappa_d(g)\dots\kappa_1(g) = \det(g) = 1$ et $\kappa_d(g) = \|g^{-1}\|^{-1}$ et donc $\|g^{-1}\|^{-1} \geqslant \kappa_1(g)^{1-d}$.

De plus,

$$\begin{aligned}
\delta(g\pi_g V_h^+, V_h^<) &\geqslant \delta(g\pi_g x_h^M, y_h^m) - d(g\pi_g V_h^+, g\pi_g x_h^M) - d(V_h^<, y_h^m) \\
&\geqslant 2\varepsilon - \|g\|\|\pi_g\| d(V_h^+, x_h^M) - d(V_h^<, y_h^m) \\
&\geqslant 2\varepsilon - 2\frac{\kappa_1(g)}{\varepsilon}\frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon} \geqslant 2\varepsilon\left(1 - \frac{\kappa_1(g)\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon^3}\right) \geqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Et,

$$d(V_g^+, V_h^+) \geqslant d(X_g^M, X_h^M) - d(V_g^+, X_g^M) - d(V_h^+, X_h^M) \geqslant 2\varepsilon - \frac{\kappa_{1,2}(g)}{\varepsilon} - \frac{\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon} \geqslant \varepsilon$$

et donc, en utilisant que $e^{-\lambda_1(g)} \geqslant \kappa_1(g)^{-1}$, on trouve en regroupant les inégalités, que

$$\left| e^{-\lambda_1(g)} \frac{\varphi_g^<(v_g^+)\varphi_h^<(g\pi_g v_h^+)}{\varphi_h^<(v_g^+)\varphi_g^<(v_h^+)} \right| \geqslant \frac{\varepsilon^3}{\kappa_1(g)^d}$$

Et nous obtenons donc ce qu'il fallait démontrer. □

Le lemme 7.3.4 nous a montré que si nous faisons de bonnes hypothèses de proximalité et de transversalité sur des éléments g, h de $\mathbf{G}$, alors nous avons un bon contrôle de $\lambda_1(fgh) - \lambda_1(f) - \lambda_1(gh)$ où f est dans une petite boule autour de g^p. Nous allons maintenant utiliser le lemme 7.1.6 pour montrer que des éléments génériques au sens de la mesure vérifient ces conditions et démontrer le

Lemme 7.3.5. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Soit ν l'unique mesure de probabilité stationnaire sur $\mathbb{P}(\mathbb{R}^d)$.

Alors, il existe $n_0, p \in \mathbb{N}$ et $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tout $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\Delta, c_3 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant n_0$,

$$\rho^{*pn} \otimes \rho^{*pn} \left(\left\{ g, h \;\middle|\; \begin{array}{c} g, h \text{ et } gh \text{ sont proximaux, } V_g^+, V_h^+ \text{ et } V_{gh}^+ \text{ sont} \\ \Delta - \nu\text{-réguliers à l'échelle } e^{-\alpha_2 pn} \text{ et} \\ e^{-c_1 n} \leqslant |\lambda_1(gh) - \lambda_1(g) - \lambda_1(h)| \leqslant e^{-c_2 n} \end{array} \right\} \right) \geqslant e^{-c_3 n}$$

Démonstration. Nous notons, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\eta, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$,

$$G_n = \left\{ g \in \mathbf{G} \;\middle|\; \begin{array}{l} \rho^{*n}(B(g, e^{-t_2 n})) \geqslant e^{-t_3 n}, \; \delta(X_g^M, Y_g^m) \geqslant 2e^{-\eta n} \\ \forall i \in \{1,2\} \left| \frac{1}{n}\kappa_i(g) - \lambda_i \right| \leqslant \eta \end{array} \right\}$$

alors, pour tout élément $g \in G_n$,

$$\kappa_{1,2}(g) = \frac{\kappa_2(g)}{\kappa_1(g)} \leqslant e^{-(\lambda_1 - \lambda_2 - 2\eta)n}$$

Et donc, en notant $\varepsilon = e^{-\eta n}$, on a que si $7\eta < \lambda_1 - \lambda_2$, pour n assez grand, g vérifie les hypothèses du lemme 7.3.4. De plus, pour $g \in G_n$ et $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$H_n^p(g) = \left\{ h \in G_{pn} \;\middle|\; \begin{array}{l} \delta(X_h^M, Y_g^m) \geqslant 2e^{-\eta n}, \; \delta(X_g^M, Y_h^m) \geqslant 2e^{-\eta n} \\ d(g\pi_g X_h^M, Y_h^m) \geqslant 2e^{-\eta n}, \; d(X_g^M, X_h^M) \geqslant 2e^{-\eta n} \end{array} \right\}$$

où π_g est la projection sur $V_g^<$ parallèlement à V_g^+.

Si p est tel que $(p-1)(\lambda_1 - \lambda_2 + \eta) > \lambda_1 + \eta$, alors pour tout $g \in G_n$ et tout $h \in H_n^p(g)$, le couple (g, h) vérifie les hypothèses du lemme 7.3.4 et nous avons donc que pour tout $f \in B(g^p, e^{-p(\lambda_1 - \lambda_2 - \eta)n})$,

$$\left| \lambda_1(fgh) - \lambda_1(f) - \lambda_1(gh) - \ln \frac{d(V_g^+, V_g^<) d(gV_h^+, V_h^<)}{d(V_g^+, V_h^<) d(gV_h^+, V_g^<)} \right| \leqslant 2c_2 e^{-p(\lambda_1 - \lambda_2 - 4\eta)n}$$

et

$$\frac{e^{-(d(\lambda_1+\eta)+5\eta)n}}{c_3} \leqslant \left| \ln \frac{d(V_g^+, V_g^<) d(gV_h^+, V_h^<)}{d(V_g^+, V_h^<) d(gV_h^+, V_g^<)} \right| \leqslant c_3 e^{-(\lambda_1-\lambda_2-7\eta)n}$$

De plus, nous avons, d'après le lemme 7.1.3, que

$$\kappa_{1,2}(gh) \leqslant \frac{\kappa_{1,2}(g)\kappa_{1,2}(h)}{\varepsilon^2} \leqslant e^{-(p+1)(\lambda_1-\lambda_2-4\eta)n}$$

et

$$\begin{aligned} \delta(X_{gh}^M, Y_{gh}^m) &\geqslant \delta(X_g^M, Y_h^m) - d(X_{gh}^M, X_g^M) - d(Y_{gh}^M, Y_h^M) \\ &\geqslant 2e^{-\eta n} - 2e^{-(\lambda_1-\lambda_2-3\eta)n} \end{aligned}$$

Donc, d'après la proposition 7.2.2, en choisissant m tel que $m(\lambda_1 - \lambda_2 - 4\eta) \geqslant \alpha_2$, nous avons que

$$\nu(B(V_{gh}^+, e^{-p\alpha_2 n}) \geqslant \nu(B(V_{gh}^+, (\kappa_{1,2}(gh)/\varepsilon^4)^m) \geqslant \frac{1}{2}\left(\rho^{*pn}(B(gh, r))\right)^m$$

Avec $r = e^{-(\lambda_1+\eta)(d+1)pn}$.

Par ailleurs, si $g_1 \in B(g, r_1)$ et $h_1 \in B(h, r_2)$, alors

$$\|gh - g_1 h_1\| \leqslant r_1\|h\| + r_2\|g_1\|$$

Et donc,

$$\rho^{*pn}(B(gh, r)) \geqslant \rho^{*n}(B(g, e^{-2(\lambda_1+\eta)(d+1)n}))\rho^{*(p-1)n}(B(h, e^{-2(\lambda_1+\eta)(d+1)n}))$$

Et donc, en prenant la valeur de $t_2 = 2(\lambda_1 + \eta)(d + 1)$, cela montre que V_{gh}^+ est $\Delta - \nu$-régulier à l'échelle $e^{-\alpha_2 pn}$ pour un certain $\Delta \in \mathbb{R}_+$.

En faisant de même pour V_f^+ et V_{fgh}^+ (en utilisant les lemmes 7.3.1 et 7.1.3), on obtient que V_f^+ et V_{fgh}^+ sont également $\Delta - \nu$-réguliers à l'échelle $e^{-\alpha_2 pn}$ (quitte à modifier la valeur de Δ).

Nous venons donc de montrer que, pour p tel que $p(\lambda_1 - \lambda_2 - 4\eta) > d\lambda_1 + 5\eta$,

$$\begin{aligned} \rho^{*pn} \otimes \rho^{*pn} &\left(\left\{ g, h \;\middle|\; \begin{array}{c} g, h \text{ et } gh \text{ sont proximaux, } V_g^+, V_h^+ \text{ et } V_{gh}^+ \text{ sont} \\ \Delta - \nu\text{-réguliers à l'échelle } e^{-\alpha_2 pn} \text{ et} \\ e^{-c_1 n} \leqslant |\lambda_1(gh) - \lambda_1(g) - \lambda_1(h)| \leqslant e^{-c_2 n} \end{array} \right\} \right) \\ &\geqslant \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{G_n}(g)\rho^{*(p-1)n}(H_n^{p-1})(g)\rho^{*pn}(B(g^p, e^{-p(\lambda_1-\lambda_2+\eta)n}))\mathrm{d}\rho^{*n}(g) \end{aligned}$$

Mais, d'après le lemme 7.1.6, nous avons que $h \in H_n^{p-1}(g)$ sauf sur un ensemble de mesure exponentiellement petite (pour trouver la minoration de $\delta(g\pi_g X_h^M, Y_h^m)$, on peut raisonner comme dans la preuve de l'inégalité 13.38 du lemme 13.13 de [BQ15] pour montrer que X_h^M et Y_h^M sont essentiellement indépendants et puis garantir que $X_h^M \notin V_g^+$ et $d(V_g^<, Y_h^m) \geqslant 2e^{-\eta n}$). Donc nous n'avons plus qu'à minorer

$$\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{G_n}(g)\rho^{*pn}(B(g^p, e^{-p(\lambda_1-\lambda_2+\eta)n}))\mathrm{d}\rho^{*n}(g)$$

Mais, en faisant de même que précédemment, quitte à changer encore la valeur de t_2, on trouve que pour une certaine constante c_3 et tout $g \in G_n$,

$$\rho^{*pn}(B(g^p, e^{-p(\lambda_1-\lambda_2+\eta)n})) \geqslant e^{-c_3 n}$$

Et finalement, d'après les lemmes 7.1.8 et 7.1.6, tout g appartient à G_n sauf un ensemble de mesure exponentiellement petite et cela nous permet de conclure. □

Nous pouvons à présent démontrer une « version intégrée » du lemme 7.3.5.

Lemme 7.3.6. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\Delta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha \int_{G^{\Delta,2}(b^{-\alpha_2})} \left|e^{ib(\lambda_1(gh)-\lambda_1(g)-\lambda_1(h))} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g)\mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(h) > 0$$

Où nous avons noté, $n(\beta, b) = \lfloor \beta \ln |b| \rfloor$ et, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$G^{\Delta,2}(r) := \left\{ (g,h) \in \mathbf{G}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} g, h \textit{ et } gh \textit{ sont proximaux et} \\ V_g^+, V_h^+, V_{gh}^+ \textit{ sont } \Delta - \nu\textit{-réguliers à l'échelle } r \end{array} \right\}$$

Démonstration. Notons, avec les notations du lemme précédent, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$G_n^2 := \left\{ g, h \;\middle|\; \begin{array}{c} g, h \text{ et } gh \text{ sont proximaux, } V_g^+, V_h^+ \text{ et } V_{gh}^+ \text{ sont} \\ \Delta - \nu\text{-réguliers à l'échelle } e^{-\alpha_2 pn} \text{ et} \\ e^{-c_1 n} \leqslant |\lambda_1(gh) - \lambda_1(g) - \lambda_1(h)| \leqslant e^{-c_2 n} \end{array} \right\}$$

Nous choisissons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et nous fixerons leurs valeurs plus tard. Nous notons p le paramètre fourni par le lemme précédent. Pour $b \in \mathbb{R}$, nous notons $n = \lfloor \beta \ln |b| \rfloor$.

Alors, pour b assez grand et tout $(g, h) \in G_n^2$,

$$|b|^{1-c_1\beta} \leqslant |b||\lambda_1(gh) - \lambda_1(g) - \lambda_1(g)| \leqslant |b|^{1-c_2\beta}$$

et donc, si $\beta > 1/c_2$, nous pouvons utiliser que

$$0 < \inf_{x\in[-1,1]} \frac{|e^{ix} - 1|}{|x|} \leqslant \sup_{x\in[-1,1]} \frac{|e^{ix} - 1|}{|x|} < +\infty$$

pour avoir que pour tout b assez grand en module et tout $(g,h) \in G_n$,

$$\left|e^{ib(\lambda_1(gh)-\lambda_1(g)-\lambda_1(g))}-1\right| \asymp |b||\lambda_1(gh)-\lambda_1(g)-\lambda_1(g)| \geqslant |b|^{1-c_1\beta}$$

et donc, nous avons que pour tout b assez grand et uniformément pour tout $(g,h) \in G_n^2$,

$$\left|e^{ib(\lambda_1(gh)-\lambda_1(g)-\lambda_1(g))}-1\right| \geqslant |b|^{1-c_1\beta}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 7.3.5,

$$\rho^{*pn(\beta,b)} \otimes \rho^{*pn(\beta,b)}(G_n^2) \geqslant e^{-c_3 n(\beta,b)} \geqslant |b|^{-c_3\beta}$$

et donc, si α est tel que $\alpha - c_3\beta + 2(1-c_1\beta) > 0$, alors

$$\liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha \int_{G^{\Delta,2}(b^{-\alpha_2})} \left|e^{ib(\lambda_1(gh)-\lambda_1(g)-\lambda_1(h))}-1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g)\mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(h) > 0$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Finalement, nous pouvons démontrer le contrôle diophantien sur les logarithmes des rayons spectraux dans les sous-groupes fortement irréductibles et proximaux de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$.

Proposition 7.3.7. *Soit ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$ ayant un moment exponentiel et dont le support engendre un sous-groupe fortement irréductible et proximal.*

Alors, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que pour tout $\alpha_2 \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\Delta \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{\left\{\substack{g \text{ est proximal} \\ V_g^+ \text{ est } \Delta-\nu\text{-régulier à l'échelle } b^{-\alpha_2}}\right\}} \left|e^{ib\lambda_1(g)}-1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g) > 0$$

avec $\lambda_1(g)$ le rayon spectral de g et $n(\beta,b) = \lfloor \beta \ln |b| \rfloor$.

Démonstration. Notons, pour $r \in \mathbb{R}_+^*$,

$$G^\Delta(r) := \left\{g \in \mathbf{G} \middle| g \text{ est proximal et } V_g^+ \text{ est } \Delta-\nu\text{-régulier à l'échelle } r\right\}$$

Supposons qu'il n'existe pas de tels α, β, p. Alors, pour tout α, β, p,

$$\liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha \int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{G^\Delta(b^{-\alpha_2})}(g) \left|e^{ib\lambda_1(g)}-1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g) = 0$$

En particulier, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha \int_{\mathbf{G}^2} \mathbb{1}_{G^\Delta(b^{-\alpha_2})}(gh) \left|e^{ib\lambda_1(gh)}-1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g)\mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(h) \\ = \liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha \int_{\mathbf{G}} \left|e^{ib\lambda_1(g)}-1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*2pn(\beta,b)}(g) = 0\end{aligned}$$

Mais, en utilisant l'inégalité triangulaire, et en reprenant la notation G_2^Δ du lemme précédent, nous avons que

$$\begin{aligned}
I_b(\beta) := &\left(\int_{G^{\Delta,2}(b^{-\alpha_2})} \left|e^{ib(\lambda_1(gh)-\lambda_1(g)-\lambda_1(h))} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g)\mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(h)\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{G^\Delta(b^{-\alpha_2})}(g) \left|e^{ib\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*2pn(\beta,b)}(g)\right)^{1/2} \\
&\qquad + 2\left(\int_{\mathbf{G}} \mathbb{1}_{G^\Delta(b^{-\alpha_2})}(g) \left|e^{ib\lambda_1(g)} - 1\right|^2 \mathrm{d}\rho^{*pn(\beta,b)}(g)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

et donc, pour tout α, β,

$$\liminf_{b\to\pm\infty} |b|^\alpha I_b(\beta) = 0$$

ce qui contredit le lemme 7.3.6. $\square$

Chapitre 8

Le théorème de renouvellement

Résumé

Dans ce chapitre, nous relions, comme annoncé dans l'introduction, la vitesse dans le théorème de renouvellement avec le contrôle de la norme de $(I_d - P(it))^{-1}$ dans les espaces de fonctions hölderiennes.

Le but est de démontrer le théorème 8.1.1 qui intervient dans la preuve du théorème 5.3.

Sommaire

8.1 Préliminaires

Étant donné un groupe localement compact et dénombrable à l'infini $\mathbf{G}$ agissant continûment sur un espace métrique $\mathbf{X}$ et un cocycle continu $\sigma : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ (cf. la définition 6.1.16), on peut définir une action de $\mathbf{G}$ sur $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$ en posant

$$g.(x,t) = (gx, t + \sigma(g,x))$$

Si ρ est une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$, nous pouvons ainsi définir une chaîne de Markov sur $\mathbf{X}\times\mathbb{R}$ dont l'opérateur associé s'écrit, pour toute fonction continue f sur $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$ et tout $(x,t) \in \mathbf{X} \times \mathbb{R}$,

$$Pf(x,t) = \int_{\mathbf{G}} f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho(g) = \int_{\mathbf{G}} f(gx, t + \sigma(g,x))\mathrm{d}\rho(g)$$

Cet opérateur commute aux translations sur $\mathbb{R}$ ce qui implique en particulier que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$ et tout $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,

$$(Pf) * g = P(f * g)$$

où nous avons noté, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$, toute fonction $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ et tout $(x,t) \in \mathbf{X} \times \mathbb{R}$,

$$f * g(x,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,u) g(t-u) \mathrm{d}u$$

Nous appelons noyau de renouvellement l'opérateur $G = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n$ quand il est défini.

Kesten a étudié dans [Kes74] les propriétés de l'opérateur G dans un cas où $\mathbf{X}$ est général ce qui lui permet de démontrer un résultat que Guivarc'h et Le Page ont employé dans [GL12] pour obtenir le théorème de renouvellement dans $\mathbb{R}^d$ associé à la marche aléatoire définie par l'action de $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$: c'est le théorème 5.1 que nous avons rappelé dans l'introduction de cette partie.

Dans ce chapitre, nous étudions la vitesse dans le théorème de renouvellement. Nous ne le ferons pas dans le cadre très général de Kesten mais directement dans celui d'un groupe contractant un espace métrique compact.

Nous fixons donc un groupe localement compact et dénombrable à l'infini $\mathbf{G}$ et une mesure borélienne de probabilité ρ sur $\mathbf{G}$.

Soit $\mathbf{X}$ un $\mathbf{G}-$espace métrique compact sur lequel agit un groupe fini $\mathbf{H}$ tel que $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $(\rho, \gamma, M, N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini $\mathbf{A}$ sur lequel la marche définie par ρ est irréductible et apériodique (voir le chapitre 6 pour les définitions idoines). Pour simplifier les notations, nous notons simplement $\pi_{\mathbf{A}}$ pour $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}$.

Nous rappelons que pour nous, $\mathbf{G} = \mathrm{SL}_d(\mathbb{R})$, ρ est une mesure sur $\mathrm{SL}_d(\mathbb{Z})$, $\mathbf{X} = \mathbb{S}^{d-1} \times \mathbf{A}$, $\mathbf{X}/\mathbf{H} = \mathbb{P}(\mathbb{R}^d) \times \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}$ est une $\Gamma_\rho-$orbite finie sur le tore.

Pour des raisons techniques sur lesquelles nous reviendrons dans la section 8.4, nous introduisons la fonction $\omega : (\mathbf{X} \times \mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\omega((x,t),(x',t')) = \begin{cases} e^{-\frac{|t|+|t'|}{2}} \sqrt{d(x,x')^2 + \left(e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2}\right)^2} & \text{si } \pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(x') \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$$

et nous posons, pour $\gamma \in]0,1]$,

$$\mathcal{C}^{0,\gamma}_\omega = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X} \times \mathbb{R}) \middle| \|f\|_{\gamma,\omega} := \sup_{\substack{(x,t),(x',t') \in \mathbf{X} \times \mathbb{R} \\ (x,t) \neq (x',t')}} \frac{|f(x,t) - f(x',t')|}{\omega((x,t),(x',t'))^\gamma} \text{ est fini} \right\}$$

de la même manière, nous notons

$$\omega_0((x,t),(x',t')) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|t-t'|^2+d(x,x')^2}}{(1+|t'|)(1+|t|)} & \text{si } \pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(x') \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$$

et nous définissons $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{\omega_0}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ comme $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{\omega}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$.

Nous verrons dans la section 8.4 que pour toute fonction f de $\mathcal{C}^{0,\gamma}_{\omega}$, il existe des fonctions $p^+(f), p^-(f)$ sur $\mathbf{A}$ telles que pour tout $x\in\mathbf{X}$,

$$p^-(f)(\pi_{\mathbf{A}}(x)) = \lim_{t\to-\infty} f(x,t) \text{ et } p^+(f)(\pi_{\mathbf{A}}(x)) = \lim_{t\to+\infty} f(x,t)$$

Nous rappelons que pour un cocycle σ sur $\mathbf{X}$ et $t\in\mathbb{R}$, nous notons $P(it)$ l'opérateur défini pour toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$ et tout $x\in\mathbf{X}$ par

$$P(it)f(x) = \int_{\mathbf{G}} e^{-it\sigma(g,x)} f(gx)\mathrm{d}\rho(g)$$

Nous renvoyons le lecteur au chapitre 6 et plus précisément au paragraphe 6.1.4 pour plus de détails.

Nous allons démontrer le

Théorème 8.1.1. *Soit $\mathbf{G}$ un groupe localement compact et dénombrable à l'infini et ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.*

Soit $\mathbf{X}$ un $\mathbf{G}-$espace métrique compact sur lequel agit un groupe fini $\mathbf{H}$ tel que $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ est $(\rho,\gamma_0,M,N)-$contracté au dessus d'un $\mathbf{G}-$ensemble fini (non vide) $\mathbf{A}$ sur lequel la marche aléatoire définie par ρ est irréductible et apériodique.

Soit $\sigma\in\mathcal{Z}^M(\mathbf{X}/\mathbf{H})$ et $\sigma_\rho = \int_{\mathbf{G}}\int_{\mathbf{X}/\mathbf{H}} \sigma(g,x)\mathrm{d}\nu(x)\mathrm{d}\rho(g)$ où ν est l'unique mesure $P-$invariante sur $\mathbf{X}/\mathbf{H}$ donnée par la proposition 6.1.5. On suppose que $\sigma_\rho>0$.

On suppose par ailleurs qu'il existe $\gamma_0\in\,]0,1]$ tel que pour tout $\gamma\in\,]0,\gamma_0]$ et $t_0\in\mathbb{R}_+^*$, il existe C_0, L telles que pour tout $t\in\mathbb{R}$ avec $|t|\geqslant t_0$,

$$\|(I_d - P(it))^{-1}\|_{\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})} \leqslant C_0|t|^L$$

Nous notons Π_0 l'opérateur défini pour toute $f\in\mathcal{C}^\gamma_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ telle que $p^+(f)=0$ par

$$\Pi_0 f(x,t) = \int_t^{+\infty} N_0 f(x,u)\mathrm{d}u$$

où N_0 est le projecteur sur l'espace des fonctions $P-$invariantes dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ et nous faisons l'abus de notation $N_0 f(x,u) = N_0 f_u(x)$ avec $f_u = f(.,u)$.

Alors, pour tout $\gamma>0$ assez petit, il existe $\alpha, C\in\mathbb{R}_+^*$ telles que pour toute $f\in\mathcal{C}^\gamma_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ telle que $p^+(f) = 0 = \sum_{a\in\mathbf{A}} p^-(f)(a)$ et pour tout $x\in\mathbf{X}$,

$$\lim_{t\to-\infty}\left(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0\right) f(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P^n p^-(f)(\pi_{\mathbf{A}}(x))$$

De plus, $(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f \in \mathcal{C}^\alpha_{\omega_0}(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$ *et*

$$\left\| \left(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0 \right) f \right\|_{\alpha,\omega_0} \leqslant C \|f\|_{\gamma,\omega}$$

Remarque 8.1.2. La fonction Gf est bien définie sous les hypothèse du théorème car la convergence dans la série définissant Gf est alors uniforme sur tout compact de $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Pour démontrer le théorème, on utilise la décomposition donnée par le lemme 8.4.3, le corollaire 8.4.5 et le lemme 8.4.6 □

8.2 Perturbations non-unitaires par des cocycles

Dans cette partie, nous étudions l'inverse de l'opérateur $I_d - P(z)$ et nous prouvons la proposition 8.2.1 qui montre qu'un contrôle de la croissance de sa norme sur l'axe des imaginaires donne un contrôle de la norme de l'opérateur et de ses dérivées dans un voisinage de l'axe dont nous connaissons bien la forme.

Soit $\mathbf{G}$ un groupe topologique agissant sur un espace métrique compact $(\mathbf{X}, d)$ et ρ une mesure borélienne de probabilité sur $\mathbf{G}$.

Pour un cocycle $\sigma : \mathbf{G} \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}$ et $g \in \mathbf{G}$, nous rappelons que nous avons noté

$$\sigma_{\sup}(g) = \sup_{x \in \mathbf{X}} |\sigma(g,x)| \text{ et } \sigma_{\mathrm{Lip}}(g) = \sup_{\substack{x,y \in \mathbf{X} \\ \pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(y) \\ x \neq y}} \frac{|\sigma(g,x) - \sigma(g,y)|}{d(x,y)}$$

Et pour $M \in \mathbb{R}_+$ et $N : \mathbf{G} \to [1, +\infty[$ une fonction sous-multiplicative sur $\mathbf{G}$,

$$\mathcal{Z}^M_N(\mathbf{X}) = \left\{ \sigma \text{ est un cocycle continu sur } \mathbf{X} \middle| \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{\sigma_{\mathrm{Lip}}(g)}{N(g)^M} \text{ et } \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{e^{\sigma_{\sup}(g)}}{N(g)^M} \text{ sont finis} \right\}$$

et, finalement, pour $\sigma \in \mathcal{Z}^M_N(\mathbf{X})$,

$$[\sigma]_M = \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{\sigma_{\mathrm{Lip}}(g)}{N(g)^M} \text{ et } [\sigma]_\infty = \sup_{g \in \mathbf{G}} \frac{e^{\sigma_{\sup}(g)}}{N(g)^M}$$

Nous notons $\mathbb{C}_\gamma := \{z \in \mathbb{C} || \Re(z)| < \gamma\}$. Pour $z \in \mathbb{C}_\gamma$ et $\sigma \in \mathcal{Z}^M_N(\mathbf{X}/\mathbf{H})$, nous définissons l'opérateur $P(z)$ sur $\mathcal{C}^0(\mathbf{X})$ par

$$P(z)f(x) = \int_{\mathbf{G}} e^{-z\sigma(g,x)} f(gx) \mathrm{d}\rho(g)$$

C'est un opérateur continu puisque pour toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$, tout $z \in \mathbb{C}_\gamma$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$|P(z)f(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbf{G}} e^{-\Re(z)\sigma(g,x)} \mathrm{d}\rho(g) \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbf{G}} [\sigma]_\infty^\gamma N(g)^{\gamma M} \mathrm{d}\rho(g)$$

et $\int_{\mathbf{G}} N(g)^{\gamma M} \mathrm{d}\rho(g)$ est finie par définition de la contraction de l'action. Nous regroupons résultats principaux de ce paragraphe dans la

Proposition 8.2.1. *Sous les hypothèses et notations du théorème 8.1.1.*

Pour tout $\gamma > 0$ assez petit, il existe $\eta, C, L, t \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $(z \mapsto P(z))$ définit une fonction analytique de $\mathbb{C}_\eta$ vers l'ensemble des opérateurs continus sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$. De plus, pour tout $z \in [0, \eta[\oplus i\mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|P(z)^n\|_\gamma \leqslant C(1 + |z|)e^{-t\Re(z)n}$$

Enfin, en notant

$$U(z) = (I_d - P(z))^{-1} - \frac{1}{\sigma_\rho z} N_0,$$

on a que $(z \mapsto U(z))$ (qui est définie a priori sur $i\mathbb{R} \setminus \{0\}$) peut se prolonger en une fonction analytique à valeurs dans l'espace des opérateurs continus sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ et définie sur

$$\mathcal{D}_{\eta,C,L} := \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| \frac{-1}{C(1 + |\Im z|)^{L+1}} < \Re(z) < \eta \right\}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathcal{D}_{\eta,C,L}$

$$\|U^{(n)}(z)\|_\gamma \leqslant n! C^{n+1} (1 + |\Im z|)^{(L+1)(n+1)}$$

Avant de prouver chacun des points de la proposition dans les lemmes suivants, nous dessinons la zone $\mathcal{D}_{\eta,C,L}$.

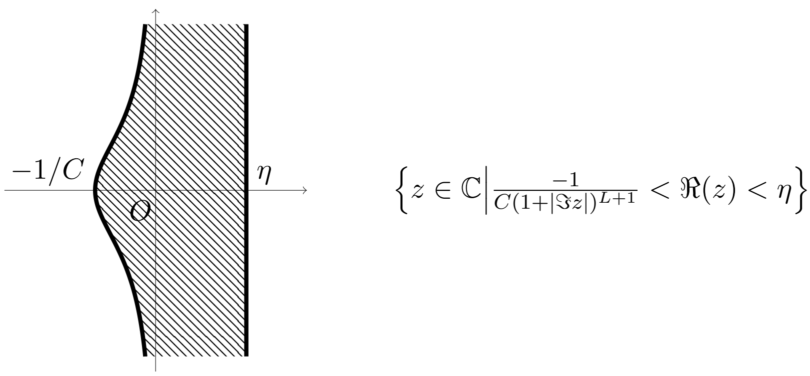

Figure 8.1 – Forme de la zone $\mathcal{D}_{\eta,C,L}$

Remarque 8.2.2. Cette proposition ne fait que généraliser la situation dans $\mathbb{R}$ quand l'opérateur $P(z)$ est la transformée de Fourier-Laplace $\widehat{\rho}(z)$ de la mesure ρ. Dans ce cas là, les mêmes estimations peuvent être obtenues sous l'hypothèse « non-lattice of type p » utilisée notamment par Carlsson dans [Car83].

Lemme 8.2.3. *Sous les hypothèses de la proposition 8.2.1, si $\sigma_\rho > 0$ alors, il existe $\eta, t, C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $s \in [0, \eta]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\sup_{x \in \mathbf{X}} \int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant C e^{-tsn}$$

Démonstration. Premièrement, d'après l'inégalité de Jensen pour tout $0 \leqslant s \leqslant \eta$,

$$\int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant \left(\int_{\mathbf{G}} e^{-\eta\sigma(g,x)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \right)^{s/\eta} = (P(\eta)^n 1(x))^{s/\eta}$$

et de plus, comme $\sigma_\rho > 0$, le lemme 10.17 de [BQ15] et le fait que (avec leurs notations mais en se rappelant que leur P_ϑ est ce ce que nous avons appelé $P(-i\vartheta)$ et en utilisant leur égalité 10.32),

$$\lambda'(0) = \int_{\mathbf{X}} P'(0) 1 \mathrm{d}\nu(x) = -\sigma_\rho < 0$$

nous montrent qu'il existe $\eta, t, C \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\sup_x P(\eta)^n 1(x) \leqslant C e^{-tn}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Lemme 8.2.4. *Sous les hypothèses de la proposition 8.2.1, pour tout $\gamma > 0$ assez petit, il existe $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que la fonction $(z \mapsto P(z))$ est analytique de $\mathcal{C}_\eta$ dans l'espace des opérateurs continus sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ et il existe $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}_\eta$ avec $\Re(z) \geqslant 0$, toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ et tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$\|P(z)^n f\|_\gamma \leqslant C \left(e^{-tn} m_\gamma(f) + (1 + |z|) \|f\|_\infty \right)$$

Remarque 8.2.5. Cette preuve est très proche des calculs de la proposition 6.1.18. La difficulté vient ici de ce que le noyau avec lequel nous perturbons notre opérateur n'est plus de module 1.

Démonstration. Pour voir que $(P(z))$ est une famille analytique d'opérateurs, nous renvoyons au lemme 10.16 de [BQ15].

Soit γ assez petit et $\eta \in \mathbb{R}_+^*$.

Calculons, pour $z \in \mathbb{C}_\eta$, $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, $x, y \in \mathbf{X}$ avec $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|P(z)^n f(x) - P(z)^n f(y)| \\
&\qquad \leqslant \int_{\mathbf{G}} \left| e^{-z\sigma(g,x)} f(gx) - e^{-z\sigma(g,y)} f(gy) \right| \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\qquad \leqslant \int_{\mathbf{G}} e^{-\Re(z)\sigma(g,x)} |f(gx) - f(gy)| + \|f\|_\infty \left| e^{-z\sigma(g,x)} - e^{-z\sigma(g,y)} \right| \mathrm{d}\rho^{*n}(g)
\end{aligned} \tag{8.2.1}$$

Mais, nous avons, en utilisant la définition de $[\sigma]_M$ et $[\sigma]_\infty$ (cf. l'équation (6.1.5)), que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{aligned}
\left| e^{-z\sigma(g,x)} - e^{-z\sigma(g,y)} \right| &\leqslant 2^{1-\gamma} |z| e^{\Re(z)\sigma_{\sup}(g)} (\sigma_{\sup}(g))^{1-\gamma} |\sigma(g,x) - \sigma(g,y)|^\gamma \\
&\leqslant 2^{1-\gamma} |z| [\sigma]_\infty^\eta N(g)^{M(\gamma + |\Re(z)|)} \left(\ln([\sigma]_\infty N(g)^M) \right)^{1-\gamma} [\sigma]_M^\gamma d(x,y)^\gamma \\
&\leqslant C_\varepsilon |z| N(g)^{M(\gamma+\eta+\varepsilon)} [\sigma]_\infty [\sigma]_M d(x,y)^\gamma
\end{aligned}$$

où on a noté C_ε tel que pour tout $x \in [1, +\infty[$, $x \leqslant C_\varepsilon e^{\varepsilon x}/2^{1-\gamma}$.

Et donc,

$$\int_{\mathbf{G}} \left| e^{-z\sigma(g,x)} - e^{-z\sigma(g,y)} \right| \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant C_\varepsilon |z| [\sigma]_\infty [\sigma]_M d(x,y)^\gamma \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M(\gamma+\eta+\varepsilon)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \tag{8.2.2}$$

Par ailleurs,

$$\int_{\mathbf{G}} e^{-\Re(z)\sigma(g,x)} |f(gx) - f(gy)| \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant m_\gamma(f) [\sigma]_\infty^\eta \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} d(gx, gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \tag{8.2.3}$$

De plus, soit $d_0 \in \mathbb{R}_+^*$ tel que si $d(x,y) \leqslant d_0$ alors $d(x,y) = d(\pi_{\mathbf{H}} x, \pi_{\mathbf{H}} y)$. Alors, pour tout $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ et tous x, y tels que $0 < d(x,y) \leqslant \varepsilon' d_0$, nous avons que

$$\begin{aligned}
I_n(x,y) :&= \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} d(gx, gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \mathbb{1}_{d(gx,gy) \leqslant d_0} d(gx, gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\qquad + \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \mathbb{1}_{d(gx,gy) \geqslant d_0} d(gx, gy)^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} d(g\pi_{\mathbf{H}} x, g\pi_{\mathbf{H}} y)^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\qquad + \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \mathbb{1}_{MN(g)^M \geqslant 1/\varepsilon} M N(g)^{M\gamma} d(x,y)^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant d(x,y)^\gamma \left(\int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \frac{d(g\pi_{\mathbf{H}} x, g\pi_{\mathbf{H}} y)^\gamma}{d(\pi_{\mathbf{H}} x, \pi_{\mathbf{H}} y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \right. \\
&\qquad \left. + M \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M(\eta+\gamma)} \mathbb{1}_{MN(g)^M \geqslant 1/\varepsilon} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \right)
\end{aligned} \tag{8.2.4}$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en utilisant la contraction de $\mathbf{X}/\mathbf{H}$,

$$\begin{aligned} J_n(x,y) :&= \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \frac{d(g\pi_{\mathbf{H}}x, g\pi_{\mathbf{H}}y)^\gamma}{d(\pi_{\mathbf{H}}x,\pi_{\mathbf{H}}y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbf{G}} N(g)^{2M\eta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \int_{\mathbf{G}} \frac{d(g\pi_{\mathbf{H}}x, g\pi_{\mathbf{H}}y)^{2\gamma}}{d(x,y)^{2\gamma}} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \right)^{1/2} \\ &\leqslant \sqrt{C_{2\gamma}} e^{-\delta_{2\gamma}n/2} \left(\int_{\mathbf{G}} N(g)^{2\eta M} \mathrm{d}\rho(g) \right)^{n/2} \end{aligned} \tag{8.2.5}$$

Nous pouvons à présent choisir n tel que $\sqrt{C_{2\gamma}} e^{-\delta_{2\gamma}n/4} \leqslant 1/4[\sigma]_\infty$ et alors, pour η tel que

$$e^{-\delta_{2\gamma}n/4} \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \mathrm{d}\rho(g) \leqslant 1,$$

nous trouvons, avec l'équation (8.2.5), que

$$J_n(x,y) = \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \frac{d(g\pi_{\mathbf{H}}x, g\pi_{\mathbf{H}}y)^\gamma}{d(\pi_{\mathbf{H}}x,\pi_{\mathbf{H}}y)^\gamma} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant \frac{1}{4[\sigma]_\infty}$$

De plus, ce n étant fixé, nous pouvons prendre $\varepsilon' \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$M \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M(\eta+\gamma)} \mathbb{1}_{MN(g)^M \geqslant 1/\varepsilon'} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant 1/4[\sigma]_\infty$$

et cela montre, avec les équations (8.2.1), (8.2.2), (8.2.3) et (8.2.4), que pour tout $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, tout $x,y \in \mathbf{X}$ avec $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(y)$ et $d(x,y) \leqslant \varepsilon' d_0$,

$$\frac{|P(z)^n f(x) - P(z)^n f(y)|}{d(x,y)^\gamma} \leqslant \frac{1}{2} m_\gamma(f) + 2\|f\|_\infty |z| [\sigma]_\infty [\sigma]_M \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M(\gamma+\eta+\varepsilon)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g)$$

Par ailleurs, si $d(x,y) \geqslant \varepsilon' d_0$, alors

$$|P^n(z)f(x) - P^n(z)f(y)| \leqslant 2 \frac{d(x,y)^\gamma}{(\varepsilon' d_0)^\gamma} \|f\|_\infty [\sigma]_\infty \int_{\mathbf{G}} N(g)^{M\eta} \mathrm{d}\rho^{*n}(g)$$

Ce que l'on a montré, c'est donc que pour tout $\gamma, \eta > 0$ assez petits, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et une constante C (dépendant de n, σ et ρ) tels que pour tout $z \in \mathbb{C}_\eta$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$m_\gamma(P(z)^n f) \leqslant \frac{1}{2} m_\gamma(f) + Ce^{Cn}(1+|z|)\|f\|_\infty$$

Comme par ailleurs, d'après le lemme 8.2.3, on a que pour $\Re(z) \geqslant 0$,

$$\|P(z)^n f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \sup_{x \in \mathbf{X}} \int_{\mathbf{G}} e^{-\Re(z)\sigma(g,x)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant C\|f\|_\infty e^{-\Re(z)tn}$$

on obtient les inégalités voulues en itérant ces relations et on renvoie à [ITM50] pour une preuve que l'on peut prendre une constante C ne dépendant ni de n ni de z. $\square$

Une famille d'opérateurs $(P(z))$ est dite méromorphe en z_0 si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la famille $((z-z_0)^N P(z))$ est analytique sur un voisinage de z_0.

Nous allons à présent utiliser une version du théorème de Fredholm analytique valable pour les opérateurs quasi-compacts que nous énonçons dans le

Théorème 8.2.6. *Soit $(\mathcal{B}, \|\,.\,\|_{\mathcal{B}})$ un espace de Banach.*

Soit $\|\,.\,\|$ une norme sur $\mathcal{B}$ telle que la boule unité de $\mathcal{B}$ pour la norme $\|\,.\,\|_{\mathcal{B}}$ est compacte pour $\|\,.\,\|$.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert connexe de $\mathbb{C}$.

Soit $(P(z))_{z\in\mathcal{U}}$ une famille analytique d'opérateurs définie sur $\mathcal{U}$ telle qu'il existe $r \in [0,1[$ et une fonction $(z \mapsto R(z))$ à valeurs réelles tels que pour tout vecteur $f \in \mathcal{B}$, et tout $z \in \mathcal{U}$,

$$\|P(z)f\|_{\mathcal{B}} \leqslant r\|f\|_{\mathcal{B}} + R(z)\|f\|$$

Alors on a l'alternative suivante

— L'opérateur $I_d - P(z)$ n'est inversible pour aucun $z \in \mathcal{U}$.

— La fonction $(z \mapsto (I_d - P(z))^{-1})$ est méromorphe sur $\mathcal{U}$.

Démonstration. La preuve est la même que celle de l'alternative de Fredholm classique en remarquant que d'après le théorème de Ionescu-Tulcea et Marinescu (que nous avons rappelé dans le théorème 6.1.10) on a un contrôle uniforme en z sur le rayon spectral essentiel de l'opérateur $P(z)$. □

Lemme 8.2.7. *Sous les hypothèses de la proposition 8.2.1, la famille $((I_d - P(z))^{-1})_{z\in\mathbb{C}_\eta}$ est une famille méromorphe d'opérateurs continus qui est même analytique sur $]0,\eta[\oplus i\mathbb{R}$.*

De plus, on peut choisir η tel qu'il existe C, t tels que pour tout $z \in]0,\eta[\oplus i\mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|P(z)^n\|_\gamma \leqslant C(1+|z|)e^{-t\Re(z)n}$$

Enfin, si $\sigma_\rho \neq 0$ et si η' est assez petit, on peut écrire, pour $z \in B(0,\eta') \setminus \{0\}$,

$$(I_d - P(z))^{-1} = \frac{1}{\sigma_\rho z} N_0 + U(z)$$

où N_0 est l'opérateur de projection sur l'espace des fonctions $P-$invariantes et $(U(z))$ est une famille analytique d'opérateurs continus sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$ définie sur $B(0,\eta')$.

Démonstration. Pour tout $z \in [0,\eta] \oplus i\mathbb{R}$, tout $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X})$, nous avons d'après le lemme 8.2.3

$$\|P(z)^n f\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \sup_{x\in\mathbf{X}} \int_{\mathbf{G}} e^{-\Re(z)\sigma(g,x)} \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant C\|f\|_\infty e^{-t\Re(z)n}$$

Et donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$, et tout $n \in \mathbb{N}$, (on peut supposer sans perte de généralité que les constante t données par les lemmes 8.2.4 et 8.2.3 sont les mêmes et idem pour les constantes C), d'après le lemme 8.2.4 appliqué à $P^n(z)(P^n(z)f)$ puis à $P^n(z)f$, on a que

$$\begin{aligned}
\|P(z)^{2n}f\|_\gamma &\leqslant C\left(e^{-tn}\|P^n(z)f\|_\gamma + (1+|z|)\|P^n(z)f\|_\infty\right) \\
&\leqslant C\left(e^{-tn}C(m_\gamma(f) + (1+|z|)e^{-tn}\|f\|_\infty) + Ce^{-t\Re(z)n}(1+|z|)\|f\|_\infty\right) \\
&\leqslant C^2(1+|z|)\|f\|_\gamma\left(e^{-tn} + e^{-t\Re(z)n}\right)
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

De plus, le lemme 8.2.4 montre que le rayon spectral essentiel de $P(z)$ est uniformément majoré par e^{-t} sur $\mathbb{C}_\eta$ et donc, nous pouvons appliquer le théorème 8.2.6 pour montrer que la famille $(I_d - P(z))^{-1}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}_\eta$ puisque nous venons de démontrer que $(I_d - P(z))^{-1}$ est bien défini sur $]0,\eta] \oplus i\mathbb{R}$.

Par ailleurs, cela prouve que $(I_d - P(z))^{-1}$ n'a pas de pôle dans $]0,\eta[\oplus i\mathbb{R}$.

Enfin, nous renvoyons au lemme 3.2 de [BL85] ou au lemme 10.17 de [BQ15] pour le développement de $(I_d - P(z))^{-1}$ au voisinage de 0. En effet, en adaptant l'argument, on trouve qu'il existe $(N(z)), (U_1(z))$ familles analytiques d'opérateurs continus définies au voisinage de 0 et une fonction analytique λ telles que pour tout $z \neq 0$ dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$,

$$(I_d - P(z))^{-1} = \frac{1}{1-\lambda(z)}N(z) + U_1(z)$$

Ce qui termine la preuve du lemme puisque λ et N sont analytiques, $\lambda(0) = 1$, $\lambda'(0) = -\sigma_\rho \neq 0$ et $N(0)$ est le projecteur sur $\ker(I_d - P)$. □

Lemme 8.2.8. *Sous les hypothèses et notations de la proposition 8.2.1*

On note

$$U(z) = (I_d - P(z))^{-1} - \frac{1}{\sigma_\rho z}N_0$$

Alors, pour tout $\gamma, \eta > 0$ assez petits, il existe C, L tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec

$$\frac{-1}{C(1+|\Im z|)^L} < \Re(z) < \eta$$

et tout $n \in \mathbb{N}$, on a que

$$\|U^{(n)}(z)\|_\gamma \leqslant C^{n+1}n!(1+|z|)^{(L+1)(n+1)}$$

Démonstration. Premièrement, on note que d'après le lemme précédent, $U(z)$ est bien défini sur un voisinage $B(0,\eta')$ de 0.

De plus, pour toute fonction hölderienne f, tout $z \in \mathbb{C}_\eta$ et tout $x \in \mathbf{X}$, on a que

$$P'(z)f(x) = \int_{\mathbf{G}} \sigma(g,x)e^{-z\sigma(g,x)}f(gx)\mathrm{d}\rho(g)$$

Et donc, en faisant les mêmes types de calculs que dans le lemme 8.2.4, on trouve que pour une certaine constante $C_1 \in \mathbb{R}_+$ et tout $z \in \mathbb{C}_\eta$,

$$\|P'(z)\|_\gamma \leqslant C_1(1+|z|)$$

Donc, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$,

$$\begin{aligned}\|(I_d - P(z))f\|_\gamma &\geqslant \|(I_d - P(\Im z))f\|_\gamma - |\Re(z)| \sup_{z'} \|P'(z)\|_\gamma \|f\|_\gamma \\ &\geqslant \|(I_d - P(\Im z))f\|_\gamma - C_1|\Re(z)|(1+|z|)\|f\|_\gamma\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\inf_{f\in\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})\setminus\{0\}} \frac{\|(I_d - P(z))f\|_\gamma}{\|f\|_\gamma} \geqslant \inf_{f\in\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})\setminus\{0\}} \frac{\|(I_d - P(\Im z))f\|_\gamma}{\|f\|_\gamma} - C_1|\Re(z)|(1+|z|)$$

Mais, par hypothèse, pour $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \geqslant \eta'$,

$$\inf_{f\in\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})\setminus\{0\}} \frac{\|(I_d - P(\Im z))f\|_\gamma}{\|f\|_\gamma} = \frac{1}{\|(I_d - P(\Im z))^{-1}\|_\gamma} \geqslant \frac{1}{C_0(1+|z|)^L}$$

Donc, pour $z \in \mathbb{C}_\eta$ avec $|z| \geqslant \eta'$ et

$$|\Re(z)| \leqslant \frac{C_0}{C_1(1+|z|)^{L+1}},$$

nous obtenons que,

$$\inf_{f\in\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})\setminus\{0\}} \frac{\|(I_d - P(z))f\|_\gamma}{\|f\|_\gamma} \geqslant \frac{1}{2C_0(1+|z|)^L}$$

Cela montre, en utilisant que $P(z)$ a un rayon spectral essentiel strictement inférieur à 1, que $I_d - P(z)$ est inversible et que

$$\|(I_d - P(z))^{-1}\|_\gamma \leqslant 2C_0(1+|z|)^L$$

Nous venons donc de montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout $z \in \mathbb{C}_\eta$ avec

$$|\Re(z)| \leqslant \frac{1}{C(1+|z|)^{L+1}}$$

on a que U est analytique en z et

$$\|U(z)\|_\gamma \leqslant C(1+|z|)^L$$

De plus, d'après le lemme 8.2.7, si $z \in \mathbb{C}_\eta$ avec $\Re(z) \geqslant 1/C(1+|z|)^{L+1}$, alors on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|P(z)^n\|_\gamma \leqslant C(1+|z|)e^{-t\Re(z)n}$$

et donc,

$$\|(I_d - P(z))^{-1}\|_\gamma \leqslant \frac{C(1+|z|)}{1-e^{-t_0\Re(z)}} \leqslant \frac{C(1+|z|)}{t\Re(z)} \leqslant \frac{C^2(1+|z|)^{L+2}}{t}$$

Et cela montre que la fonction U est analytique sur $]0,\eta[\oplus i\mathbb{R}$.

Nous avons donc montré que pour η assez petit et tout $z \in \mathbb{C}$ avec

$$\frac{-1}{C(1+|z|)^{L+1}} < \Re(z) < \eta$$

on a que pour une constante C',

$$\|U(z)\|_\gamma \leqslant C'(1+|z|)^{L+2}$$

Pour conclure, on peut faire comme Gelfand et Shilov dans la preuve du théorème 15 de [GC64] pour avoir le contrôle des dérivées de U sur un domaine $D_{\eta,C'',L+1}$. □

8.3 Théorème de renouvellement pour les fonctions régulières

Dans cette partie, nous démontrons un théorème de représentation du noyau de renouvellement appliqué aux fonctions régulières et nous en déduisons le théorème de renouvellement avec sa vitesse pour ces fonctions-là.

Soit $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, nous notons

$$m_{\gamma,\varepsilon}(f) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sup_{\substack{x,x'\in\mathbf{X}\\ x\neq x'\\ \pi_{\mathbf{A}}(x)=\pi_{\mathbf{A}}(x')}} e^{\gamma|t|}\frac{|f(x,t)-f(x',t)|}{d(x,x')^\gamma}$$

et

$$\|f\|_{\gamma,\infty} = \sup_{x\in\mathbf{X}}\sup_{t\in\mathbb{R}} e^{\gamma|t|}|f(x,t)|$$

de plus, nous notons

$$\|f\|_{\gamma,\varepsilon} = \|f\|_{\gamma,\infty} + m_{\gamma,\varepsilon}(f)$$

Enfin, nous définissons

$$\mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X}\times\mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathcal{C}^0(\mathbf{X})) \middle| \forall m \in [0,k] \|f^{(m)}\|_{\gamma,\mathcal{E}} \text{ est finie} \right\} \tag{8.3.1}$$

où nous avons noté

$$f^{(k)}(x,t) = \frac{\partial^k f}{\partial t^k}(x,t)$$

Et, pour $f \in \mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$,

$$\|f\|_{\gamma,k} = \max_{m\in[0,k]} \|f^{(m)}\|_{\gamma,\mathcal{E}}$$

Si $f \in \mathcal{E}^{\gamma,0}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, alors nous notons, pour $x\in\mathbf{X}$ et $\xi\in\mathbb{R}$,

$$\widehat{f}(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f(x,t)\mathrm{d}t$$

Alors, il est clair que à ξ fixé, $\widehat{f}(x,\xi)$ est une fonction hölderienne sur $\mathbf{X}$.

De plus,

$$\frac{\partial^l \widehat{f}}{\partial \xi^l}(x,\xi) = \int_{\mathbb{R}} (-it)^l e^{-i\xi t} f(x,t)\mathrm{d}t$$

Et, en intégrant par parties, on trouve que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$ et tout $m\in\mathbb{N}$,

$$\xi^m \widehat{f}(x,\xi) = (-i)^m \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi t} f^{(m)}(x,t)\mathrm{d}t$$

et donc, si $f \in \mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, alors

$$(1+|\xi|^k)|\widehat{f}(x,\xi)| \leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|\mathrm{d}t + \int_{\mathbb{R}} |f^{(k)}(x,t)|\mathrm{d}t \leqslant 2\|f\|_{\gamma,k}\int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}\mathrm{d}t$$

de même, si $\pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}(x')$,

$$(1+|\xi|^k)|\widehat{f}(x,\xi) - \widehat{f}(x',\xi)| \leqslant 2\|f\|_{\gamma,k} d(x,x')^\gamma \int_{\mathbb{R}} e^{-\gamma|t|}\mathrm{d}t$$

et donc, comme on peut faire pareil avec les fonctions $\frac{\partial^l \widehat{f}}{\partial \xi^l}$, nous avons démontré le

Lemme 8.3.1. *Soient $k,l\in\mathbb{N}$. Il existe une constante C telle que pour toute fonction $f\in\mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ et tout $\xi\in\mathbb{R}$, on a*

$$\left\| \frac{\partial^l \widehat{f}}{\partial \xi^l}(\,.\,,\xi) \right\|_\gamma \leqslant C\frac{\|f\|_{\gamma,k}}{1+|\xi|^k}$$

Nous retrouvons ainsi les propriétés usuelles de la transformée de Fourier qui échange régularité et décroissance à l'infini.

Avant d'aller plus loin, montrons que la convolution par des fonctions $\mathcal{E}^{\gamma,k}$ régularise les fonctions de $\mathcal{E}^{\gamma,0}$. Comme nous n'aurons pas besoin de ce résultat en toute généralité, nous le montrons avec une fonction particulière de $\mathcal{E}^{\gamma,k}$.

Lemme 8.3.2. *Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, φ_k la fonction définie pour $t \in \mathbb{R}$ par*

$$\varphi_k(t) = t^k e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Alors, pour tout $\gamma \in]0,1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C_k telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^{\gamma,0}(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$,

$$\varphi_{k+1} * f \in \mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$$

et

$$\|\varphi_{k+1} * f\|_{\gamma,k} \leqslant C_k \|f\|_{\gamma,0}$$

Démonstration. Les propriétés usuelles du produit de convolution nous disent que comme $\varphi_{k+1} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$, la fonction $f * \varphi_{k+1}$ est bien $k-$fois dérivable et sa dérivée $k-$ième est continue (puisque f est continue) et pour tout $x \in \mathbf{X}$, tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $m \in [0,k]$

$$\left(\varphi_{k+1} * f\right)^{(m)}(x,t) = \varphi_{k+1}^{(m)} * f(x,t)$$

or,

$$\varphi_{k+1}^{(m)}(t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!} t^{k+1-l} e^{-t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Ainsi,

$$\left(\varphi_{k+1} * f\right)^{(m)}(x,t) = \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} (-1)^{m-l} \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!} \int_{\mathbb{R}_+} u^{k+1-l} f(x,t-u) e^{-u} \mathrm{d}u$$

et donc, si $x, x' \in \mathbf{X}$ sont tels que $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x')$,

$$\begin{aligned}
I_{k,m,x,x',t} &:= \left| \left(\varphi_{k+1} * f\right)^{(m)}(x,t) - \left(\varphi_{k+1} * f\right)^{(m)}(x',t) \right| \\
&\leqslant \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!} \int_{\mathbb{R}_+} u^{k+1-l} e^{-\gamma|t-u|} d(x,x')^\gamma \|f\|_{\gamma,0} e^{-u} \mathrm{d}u \\
&\leqslant e^{-\gamma|t|} d(x,x')^\gamma \|f\|_{\gamma,0} \sum_{l=0}^{m} \binom{m}{l} \frac{(k+1)!}{(k+1-l)!} \int_{\mathbb{R}_+} e^{\gamma|u|} u^{k+1-m} e^{-u} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé que pour tout $v, w \in \mathbb{R}$,

$$e^{|v|-|v+w|} \leqslant e^{|w|}$$

de même,

$$J_{k,m,x,t} = \left| \left(\varphi_{k+1} * f\right)^{(m)}(x,t) \right| \leqslant C_{k,m} \|f\|_{\gamma,0} e^{-\gamma|t|}$$

pour une certaine constante $C_{k,m}$ et cela termine la preuve du lemme. □

Nous pouvons maintenant montrer une version du théorème de représentation du noyau de renouvellement dans la

Proposition 8.3.3. *Sous les hypothèses et notations de la proposition 8.1.1, pour tout $\gamma > 0$ assez petit, il existe une constante K telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^{\gamma,K}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) = \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0 f(x,t) + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} U(-i\xi)\widehat{f}(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

Où U est l'opérateur défini dans la proposition 8.2.1 et nous avons fait l'abus de notation $U(-i\xi)\widehat{f}(x,\xi) = U(-i\xi)\widehat{f}_\xi(x)$ avec $\widehat{f}_\xi = \widehat{f}(.,\xi)$.

Démonstration. Pour $s \in \mathbb{R}_+^*$, on note P_s l'opérateur défini par

$$P_s f(x,t) = \int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)} f(gx, t+\sigma(g,x))\mathrm{d}\rho(g)$$

Nous allons montrer d'abord que si f est positive, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) = \lim_{s\to 0^+}\sum_{n=0}^{+\infty} P_s^n f(x,t)$$

et puis que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P_s^n f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t}(I_d - P(s-i\xi))^{-1}\widehat{f}(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

Pour montrer la première égalité, notons que

$$\int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)} f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho^{*n}(g) = \int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)}(\mathbb{1}_{\sigma(g,x)\leqslant 0} + \mathbb{1}_{\sigma(g,x)>0}) f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho^{*n}(g)$$

Et le théorème de convergence monotone prouve que

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)}\mathbb{1}_{\sigma(g,x)>0} f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho^{*n}(g) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}}\mathbb{1}_{\sigma(g,x)>0} f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho^{*n}(g)$$

Par ailleurs, le lemme 8.2.3 et l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev montrent que pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\rho^{*n}(g\in\mathbf{G}|\sigma(g,x)\leqslant 0) \leqslant \int_{\mathbf{G}} e^{-\eta\sigma(g,x)}\mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant Ce^{-t\eta n}$$

et donc le théorème de convergence dominée prouve que l'on a

$$\lim_{s\to 0^+}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)}\mathbb{1}_{\sigma(g,x)\leqslant 0} f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho^{*n}(g) = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}}\mathbb{1}_{\sigma(g,x)\leqslant 0} f(g.(x,t))\mathrm{d}\rho^{*n}(g)$$

ce qui termine la preuve de la première égalité.

De plus

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} P_s^n f(t,x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)} f(gx, t+\sigma(g,x)) \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbf{G}} e^{-s\sigma(g,x)} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(t+\sigma(g,x))} \widehat{f}(gx,\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\mathbf{G}} e^{-(s-i\xi)\sigma(g,x)} \widehat{f}(gx,\xi) \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} \sum_{n=0}^{+\infty} P(s-i\xi)^n \widehat{f}(x,\xi) \mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} (I_d - P(s-i\xi))^{-1} \widehat{f}(x,\xi) \mathrm{d}\xi
\end{aligned}$$

et ce calcul prouve la deuxième égalité.

Par ailleurs, on a noté $U(z)$ la famille d'opérateurs définie par

$$(I_d - P(z))^{-1} = \frac{1}{\sigma_\rho z} N_0 + U(z)$$

et nous avons vu dans la proposition 8.2.1 que $(U(z))$ est une famille analytique d'opérateurs continus sur $\mathcal{C}^{0,\gamma}(\mathbf{X})$.

Et donc,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} (I_d - P(s-i\xi))^{-1} \widehat{f}(x,\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{s-i\xi} N_0 \widehat{f}(x,\xi) \frac{\mathrm{d}\xi}{\sigma_\rho} + \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} U(s-i\xi) \widehat{f}(x,\xi) \mathrm{d}\xi$$

or, pour toute fonction continue f sur $\mathbf{X}$, d'après le lemme 6.1.13, on peut écrire

$$N_0 f(x) = \sum_{i=1}^{r} p_i(x) \int f \mathrm{d}\nu_i$$

où les p_i sont des fonctions $P-$invariantes et ν_i sont des mesures stationnaires. Et donc,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{s-i\xi} N_0 \widehat{f}(x,\xi) \mathrm{d}\xi &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{r} p_i(x) \int_{\mathbf{X}} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{s-i\xi} \widehat{f}(y,\xi) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\nu_i(y) \\
&= \sum_{i=1}^{r} p_i(x) \int_{\mathbf{X}} \int_0^{+\infty} f(y, t+u) e^{-su} \mathrm{d}u \mathrm{d}\nu_i(y) \\
&= \int_0^{+\infty} N_0 f(x, t+u) e^{-su} \mathrm{d}u
\end{aligned}$$

où nous avons utilisé que

$$\frac{1}{s-i\xi} = \int_0^{+\infty} e^{-(s-i\xi)u}\mathrm{d}u$$

et donc, pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{s-i\xi}\widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi = \int_0^{+\infty} e^{-su}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(t+u)}\widehat{f}(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}u = 2\pi\int_0^{+\infty} e^{-su}f(t+u)\mathrm{d}u$$

Cela montre, en utilisant la définition de Π_0, que

$$\lim_{s\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{s-i\xi}N_0\widehat{f}(x,\xi)\mathrm{d}\xi = \int_t^{+\infty} N_0 f(x,u)\mathrm{d}u = \Pi_0 f(x,t)$$

d'où,

$$Gf(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) = \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0 f(x,t) + \lim_{s\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t}U(s-i\xi)\widehat{f}(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

et comme, à ξ fixé nous avons, d'après la proposition 8.2.1, que

$$\|U(s-i\xi)\widehat{f}(x,\xi)\|_\infty \leqslant \|U(s-i\xi)\|_\gamma\|\widehat{f}(x,\xi)\|_\gamma \leqslant C(1+|\xi|)^{L+1}\|\widehat{f}(x,\xi)\|_\gamma$$

et comme $f \in \mathcal{E}^{\gamma,K}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, on peut conclure avec le théorème de convergence dominée et le lemme 8.3.1 en prenant $K = L+3$. □

Corollaire 8.3.4. *Sous les hypothèses et notations de la proposition 8.2.1, pour tout $\gamma > 0$ assez petit, il existe des constantes C, K telles que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^{\gamma,K}$, tout $x, x' \in \mathbf{X}$ et tout $t, t' \in \mathbb{R}$ on a*

$$\left|\left(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0\right)f(x,t) - \left(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0\right)f(x',t')\right| \leqslant C\|f\|_{\gamma,K}\omega_0((x,t),(x',t'))^\gamma$$

où,

$$\omega_0((x,t),(x',t')) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|t-t'|^2+d(x,x')^2}}{(1+|t'|)(1+|t|)} & \text{si } \pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(x') \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$$

Remarque 8.3.5. En faisant tendre t' vers $+\infty$ et en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue et la proposition 8.3.3 pour voir que sous les hypothèses du corollaire

$$\lim_{t'\to\pm\infty}(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x,t') = 0$$

on trouve que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^{\gamma,K}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|Gf(x,t) - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0 f(x,t)\right| \leqslant \frac{C}{(1+|t|)^\gamma}\|f\|_{\gamma,K}$$

Démonstration. D'après la proposition 8.3.3,

$$\left(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0\right) f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} U(-i\xi)\widehat{f}(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

et donc, en intégrant par parties et en notant $\psi(x,\xi) = U(-i\xi)\widehat{f}(x,\xi)$, on trouve que, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$,

$$(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{-t^2}\psi''(x,\xi)\mathrm{d}\xi$$

et donc, pour tout $x, x' \in \mathbf{X}$ tels que $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x')$ et tout $t, t' \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
I(x,t,x',t') &:= (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x,t) - (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x',t') \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t}}{-t^2}\psi''(x,\xi)\mathrm{d}\xi - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t'}}{-t'^2}\psi''(x',\xi)\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{i\xi t}}{-t^2} - \frac{e^{i\xi t'}}{-t'^2}\right)\psi''(x,\xi) - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\xi t'}}{t'^2}\left(\psi''(x,\xi) - \psi''(x',\xi)\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{2\pi}
\end{aligned}$$

et donc,

$$|I(x,t,x',t')| \leqslant \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{i\xi t}}{t^2} - \frac{e^{i\xi t'}}{t'^2}\right| |\psi''(x,\xi)|\mathrm{d}\xi + \frac{1}{|t'|^2}\int_{\mathbb{R}} \left|\psi''(x,\xi) - \psi''(x',\xi)\right|\mathrm{d}\xi$$

or, en supposant que $|t'| \geqslant |t| \geqslant 1$, on a que

$$\left|\frac{e^{i\xi t}}{t^2} - \frac{e^{i\xi t'}}{t'^2}\right| \leqslant \frac{|t^2 - t'^2|}{t^2 t'^2} + |\xi|\frac{|t-t'|}{t'^2} \leqslant \frac{|t-t'|}{|t||t'|}(2 + |\xi|)$$

et comme par ailleurs, pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| \geqslant 1$,

$$\frac{1}{|t|} \leqslant \frac{2}{1+|t|},$$

ce que l'on obtient, c'est que

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{i\xi t}}{t^2} - \frac{e^{i\xi t'}}{t'^2}\right| |\psi''(x,\xi)|\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{4|t-t'|}{(1+|t|)(1+|t'|)}\int_{\mathbb{R}} (2+|\xi|)|\psi''(x,\xi)|\mathrm{d}\xi$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{|t'|^2}\int_{\mathbb{R}} \left|\psi''(x,\xi) - \psi''(x',\xi)\right|\mathrm{d}\xi \leqslant \frac{4d(x,y)^\gamma}{(1+|t|)(1+|t'|)}\int_{\mathbb{R}} m_\gamma(\psi''(.,\xi))\mathrm{d}\xi$$

Il ne reste donc plus qu'à étudier l'intégrabilité de $\|\psi''(\,.\,,\xi)\|_\gamma$. Or,

$$\psi''(x,\xi) = -U''(-i\xi)\widehat{f}(x,\xi) - 2iU'(-i\xi)\widehat{f}'(x,\xi) + U(-i\xi)\widehat{f}''(x,\xi)$$

et, d'après la proposition 8.2.1 il existe une constante C telle que pour tout $m \in \{0,1,2\}$,

$$\|U^{(m)}(-i\xi)\|_\gamma \leqslant C^{m+1} m! (1+|\xi|)^{(L+1)(m+1)}$$

et comme par ailleurs, d'après le lemme 8.3.1 pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante C telle que pour tout $l \in \{0,1,2\}$,

$$\left\|\frac{\partial^l \widehat{f}}{\partial \xi^l}(x,\xi)\right\|_\gamma \leqslant C\frac{\|f\|_{\gamma,k}}{1+|\xi|^k}$$

cela montre qu'il existe des constantes C, K telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}_0^{\gamma,K}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, tout $x, x' \in \mathbf{X}$ tels que $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x')$ et tout $t, t' \in \mathbb{R}^*$ avec $|t|, |t'| \geqslant 1$,

$$|I(x,t,x',t')| \leqslant C\|f\|_{\gamma,K}\frac{|t-t'| + d(x,x')^\gamma}{(1+|t|)(1+|t'|)} \tag{8.3.2}$$

Nous pouvons maintenant utiliser que pour des constantes C_γ, C, on a que pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$ et tout $x, x' \in \mathbf{X}$,

$$\frac{|t-t'| + d(x,x')^\gamma}{(1+|t|)(1+|t'|)} \leqslant C_\gamma \left(\frac{|t-t'| + d(x,x')}{(1+|t|)(1+|t'|)}\right)^\gamma \leqslant CC_\gamma\left(\frac{\sqrt{|t-t'|^2 + d(x,x')^2}}{(1+|t|)(1+|t'|)}\right)^\gamma$$

Pour montrer que l'inégalité (8.3.2) vaut aussi quand $|t| \leqslant 1$, nous allons utiliser que tous les objets utilisés se comportent bien avec les translations.

En effet, si $f \in \mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ et si nous notons pour $s \in \mathbb{R}$ $f_s(t) = f(t-s)$ alors pour tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x,t) = (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f_s(x,t+s)$$

et

$$\|f_s\|_{\gamma,k} \leqslant e^{\gamma|s|}\|f\|_{\gamma,k}$$

et donc, si $|t| \leqslant 1$, nous prenons $s \in [-10,10]$ tel que $1 \leqslant |t+s| \leqslant |t'+s|$ et nous avons que pour une nouvelle constante C,

$$|I(x,t,x',t')| \leqslant 4Ce^{10\gamma}\|f\|_{\gamma,k}\left(\frac{\sqrt{|t-t'|^2 + d(x,x')^2}}{(1+|t|)(1+|t'|)}\right)^\gamma$$

ce qu'il fallait démontrer. □

8.4 Théorème de renouvellement pour les fonctions hölderiennes.

Jusqu'à présent, nous avons démontré le théorème de renouvellement seulement pour des fonctions très régulières alors que nous sommes intéressés par des fonctions qui seront simplement hölderiennes sur $\mathbb{R}^d$.

Pour faire cela, nous allons régulariser nos fonctions en les convolant par des fonctions régulières et puis utiliser des théorèmes taubériens pour récupérer le résultat.

C'est la méthode déjà utilisée par exemple dans [BDP15]. Et nous nous appuierons comme eux sur le théorème de reste dans le théorème taubérien de Frennemo (voir [Fre65] et l'annexe A).

Nous allons donc définir une nouvelle classe de fonctions régulières sur $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$ avec lesquelles nous pourrons travailler.

Exemple 8.4.1. Sur $\mathbb{R}^d$, nous nous intéresserons aux fonctions ayant pour module de continuité (une puissance de)

$$\omega'(x,y) = \frac{\|x-y\|}{(1+\|x\|)(1+\|y\|)}$$

En utilisant l'application $\Phi : \mathbb{S}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ qui envoie (x,t) sur $e^t x$ et que nous utiliserons pour identifier $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ à $\mathbb{S}^d \times \mathbb{R}$, notre fonction ω s'écrit

$$\omega'((x,t),(x',t')) = \frac{\|e^t x - e^{t'} x'\|}{(1+e^t)(1+e^{t'})}$$

or,

$$\begin{aligned}\|e^t x - e^{t'} x'\|^2 &= e^{2t} + e^{2t'} - 2e^{t+t'}\langle x, x'\rangle = \left(e^t - e^{t'}\right)^2 + e^{t+t'}\|x-x'\|^2 \\ &= e^{t+t'}\left(\left(e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2}\right)^2 + \|x-x'\|^2\right)\end{aligned}$$

ainsi,

$$\omega'((x,t),(x',t')) = \frac{e^{t/2}}{1+e^t}\frac{e^{t'/2}}{1+e^{t'}}\sqrt{d(x,x')^2 + (e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2})^2}$$

par ailleurs, comme

$$\frac{e^{t/2}}{1+e^t} \asymp e^{-|t|/2},$$

cela nous conduit à définir, si $(\mathbf{X}, d)$ est un espace métrique quelconque et si $(x,t),(x',t') \in \mathbf{X}\times\mathbb{R}$,

$$\omega((x,t),(x',t')) = \begin{cases} e^{-\frac{|t|+|t'|}{2}}\sqrt{d(x,x')^2 + \left(e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2}\right)^2} & \text{si } \pi_{\mathbf{A}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}(x') \\ 1 & \text{si non} \end{cases}$$

Et nous notons

$$\mathcal{C}^\gamma_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{X}\times\mathbb{R}) \middle| \sup_{\substack{(x,t),(x',t')\in\mathbf{X}\times\mathbb{R} \\ (x,t)\neq(x',t')}} \frac{|f(x,t) - f(x',t')|}{\omega((x,t),(x',t'))^\gamma} \text{ est fini} \right\}$$

Le lemme suivant montre que les fonctions de $\mathcal{C}^\gamma_\omega$ se prolongent en des fonctions continues sur $\mathbf{X}\times\overline{\mathbb{R}}$.

Lemme 8.4.2. *Soit $f \in \mathcal{C}^\gamma_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$. Alors, il existe $p^+, p^- \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{A})$ telles que pour tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $t\in\mathbb{R}$,*

$$|f(x,t) - p^+(f)(\pi_{\mathbf{A}}(x))| \leqslant 2e^{\gamma t}\|f\|_{\gamma,\omega} \text{ et } |f(x,t) - p^-(f)(\pi_{\mathbf{A}}(x))| \leqslant 2e^{-\gamma t}\|f\|_{\gamma,\omega}$$

(nous rappelons notre abus de notation : nous gardons la notation $\pi_{\mathbf{A}}$ pour la fonction $\pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}$)

Démonstration. Nous ne faisons la preuve que pour p^- car elle est identique pour p^+.

Pour tout $x\in\mathbf{X}$ et tout $t,t'\in\mathbb{R}$, nous avons que

$$|f(x,t) - f(x,t')| \leqslant e^{-\frac{|t|+|t'|}{2}}\left|e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2}\right| \|f\|_{\gamma,\omega}$$

Donc, d'après le critère de Cauchy pour les fonctions, pour tout $x\in\mathbf{X}$, $(t\mapsto f(x,t))$ admet un limite en $-\infty$.

Nous pouvons donc noter $p^-(f)(x) = \lim_{t\to-\infty} f(x,t)$ et alors, par définition de $\mathcal{C}^\gamma_\omega$, pour tout $(x,t),(x',t')\in\mathbf{X}\times\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(x,t) - p^-(f)(x')| &\leqslant |f(x,t) - f(x',t')| + |f(x',t') - p^-(f)(x')| \\ &\leqslant \|f\|_{\gamma,\omega}\omega((x,t),(x',t'))^\gamma + |f(x',t') - p^-(f)(x')| \end{aligned}$$

et donc, en faisant tendre t' vers $-\infty$, nous trouvons que pour tout $t\in\mathbb{R}$ et tout $x,x'\in\mathbf{X}$ avec $\pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}(x')$,

$$|f(x,t) - p^-(f)(x')| \leqslant e^{\gamma(t-|t|)/2}\|f\|_{\gamma,\omega}$$

et cela montre que $p^-(f)(x) = p^-(f)(x')$ et, pour tout $t\in\mathbb{R}_-$,

$$|f(x,t) - p^-(f)(x)| \leqslant e^{\gamma t}\|f\|_{\gamma,\omega}$$

Pour $t \in \mathbb{R}_+$, nous avons que

$$|f(x,t) - p^-(f)(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty \leqslant 2e^{\gamma t}\|f\|_{\gamma,\omega}$$

et cela termine la preuve du lemme. □

Dans la suite, nous aurons besoin d'une fonction ψ sur $\mathbb{R}$ qui soit régulière et telle que

$$\lim_{t\to-\infty}\psi(t) = 1 \text{ et } \lim_{t\to+\infty}\psi(t) = 0$$

L'espace des fonctions de $\mathcal{C}^\gamma_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ telles que $p^-(f) = 0 = p^+(f)$ étant de codimension finie, cette fonction ψ nous servira à expliciter les projections sur cet espace et sur un supplémentaire.

Nous noterons donc à partir de maintenant,

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_t^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \tag{8.4.1}$$

Le choix de cette fonction là est purement arbitraire mais permet de simplifier les calculs ultérieurs.

Dans le premier lemme, nous montrons que la projection d'une fonction de $\mathcal{C}^\gamma_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ sur les fonctions telles que $p^+(f) = 0 = p^-(f)$ est à image dans l'espace $\mathcal{E}^{\gamma,0}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ que nous avons défini par l'équation (8.3.1).

Lemme 8.4.3. *Pour tout $\gamma \in]0,1]$ il existe une constante C ne dépendant que de γ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, en notant*

$$\varphi(x,t) = f(x,t) - p^-(f)(x)\psi(t) - p^+(f)(x)(1-\psi(t))$$

où ψ est la fonction définie par (8.4.1).

Alors, on a que $\varphi \in \mathcal{E}^{\gamma,0}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ et

$$\|\varphi\|_{\gamma,0} \leqslant C\|f\|_{\gamma,\omega}$$

Démonstration. Il est clair que la fonction φ est continue sur $\mathbf{X}\times\mathbb{R}$.

De plus, en utilisant que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = 1,$$

on trouve que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}|\varphi(x,t)| &\leqslant |f(x,t) - p^-(f)(x)|\psi(t) + |f(x,t) - p^+(f)(x)|(1-\psi(t))\\ &\leqslant \|f\|_{\gamma,\omega}\left(e^{\gamma t}\psi(t) + e^{-\gamma t}(1-\psi(t))\right)\end{aligned}$$

et donc,

$$e^{\gamma|t|}|\varphi(x,t)| \leqslant \|f\|_{\gamma,\omega}\left(e^{\gamma(|t|+t)}\psi(t) + e^{\gamma(|t|-t)}(1-\psi(t))\right)$$

et donc, il existe une constante C ne dépendant que de γ telle que

$$\sup_t e^{\gamma|t|}|\varphi(x,t)| \leqslant C\|f\|_{\gamma,\omega}$$

de même, pour x, x' tels que $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x')$,

$$|\varphi(x,t) - \varphi(x',t)| = |f(x,t) - f(x',t)| \leqslant e^{-\gamma|t|}d(x,x')^\gamma\|f\|_{\gamma,\omega}$$

et cela termine la preuve du lemme. □

Lemme 8.4.4. *Sous les hypothèses du théorème 8.1.1, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbf{X}$ et tout $t, t' \in \mathbb{R}$,*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) - \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t')\right| \leqslant C\|f\|_{\omega,\gamma}\left(e^{|t'-t|}-1\right)^\gamma$$

Démonstration. Soient $f \in \mathcal{C}^{0,\gamma}_\omega(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$, $x \in \mathbf{X}$ et $t, t' \in \mathbb{R}$. Alors,

$$\begin{aligned}
I(t,t',x) :&= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) - \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t')\right| \\
&\leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} |f(gx, t+\sigma(g,x)) - f(gx, t'+\sigma(g,x))| \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \|f\|_{\omega,\gamma}\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} \omega(gx, t+\sigma(g,x), gx, t'+\sigma(g,x))^\gamma \mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \|f\|_{\omega,\gamma}\left|e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2}\right|^\gamma \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} e^{-\gamma|t+\sigma(g,x)|/2-\gamma|t'+\sigma(g,x)|/2}\mathrm{d}\rho^{*n}(g)
\end{aligned}$$

par ailleurs,

$$|e^{(t-t')/2} - e^{(t'-t)/2}| = |e^{|t-t'|/2} - e^{-|t-t'|/2}| = e^{-|t-t'|/2}\left|e^{|t-t'|}-1\right| \leqslant e^{|t-t'|}-1$$

et donc,

$$\begin{aligned}
I(t,t',x) &\leqslant \|f\|_{\omega,\gamma}\left|e^{|t-t'|}-1\right|^\gamma \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} e^{-\gamma|t+\sigma(g,x)|/2}\mathrm{d}\rho^{*n}(g) \\
&\leqslant \|f\|_{\omega,\gamma}\left|e^{|t-t'|}-1\right|^\gamma \sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi(x,t)
\end{aligned}$$

avec $\varphi(x,t) = e^{-\gamma|t|/2}$. Pour démontrer le lemme, il ne reste donc plus qu'à voir que la série dans l'inégalité précédente est majorée uniformément en x, t. On aimerait appliquer le théorème de renouvellement (qui montre que la somme considérée a des limites finies en $\pm\infty$ et est donc bornée) à la fonction φ mais on ne peut pas encore le faire car elle n'est pas assez régulière, nous utilisons donc deux fonctions régulières et qui dominent φ.

Or,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_{\mathbf{G}} e^{-\gamma|t+\sigma(g,x)|}\mathrm{d}\rho^{*n}(g) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi_1(x,t) + \sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi_2(x,t)$$

où on a noté

$$\varphi_1(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{\gamma t}\int_t^{+\infty} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \text{ et } \varphi_2(t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\mathrm{d}u$$

pour avoir que

$$\varphi_1(t) \geqslant \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}e^{\gamma t} \text{ et } \varphi_2(t) \geqslant e^{-\gamma t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Alors, le théorème de renouvellement déjà démontré pour les fonctions régulières (le corollaire 8.3.4) et le lemme de Riemann-Lebesgue nous disent que

$$\lim_{t\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi_1(x,t) = 0 \text{ et } \lim_{t\to-\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi_1(x,t) = N_0 1\int_{\mathbb{R}}\varphi_1(t)\mathrm{d}t$$

Et donc, $\sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi_1$ est bornée. De même pour $\sum_{n=0}^{+\infty} P^n\varphi_2$ et cela termine la preuve du lemme. □

Pour $x, x' \in \mathbf{X}$ tels que $\pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}(x) = \pi_{\mathbf{A}}\circ\pi_{\mathbf{H}}(x')$ et $t, t' \in \mathbb{R}$, nous notons

$$\omega_0((x,t),(x',t')) = \frac{\sqrt{|t-t'|^2 + d(x,x')^2}}{(1+|t|)(1+|t'|)}$$

Corollaire 8.4.5. *Sous les hypothèses du théorème 8.1.1, il existe des constantes $C, K, \alpha \in \mathbb{R}_+^*$ telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_\omega^{0,\gamma}(\mathbf{X}\times\mathbb{R})$ telle que $p^+(f) = 0 = p^-(f)$ pour tout $x, x' \in \mathbf{X}$ et tout $t, t' \in \mathbb{R}$,*

$$\left|(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x,t) - (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x',t')\right| \leqslant C\|f\|_{\gamma,\omega}\omega_0((x,t),(x',t'))^\alpha$$

de plus, pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\lim_{t\to\pm\infty}(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)f(x,t) = 0$$

Démonstration. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, et $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_k(t) = t^k e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

Alors, nous avons déjà vu dans le lemme 8.3.2 qu'il existe une constante C_k telle que pour toute fonction $f \in \mathcal{E}^{\gamma,0}(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$, $f * \varphi_{k+1} \in \mathcal{E}^{\gamma,k}(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$ et

$$\|f * \varphi_{k+1}\|_{\gamma,k} \leqslant C_k \|f\|_{\gamma,0}$$

En particulier, pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_\omega^{0,\gamma}$, d'après le lemme 8.4.3,

$$\|f * \varphi_{k+1}\|_{\gamma,k} \leqslant C_k \|f\|_{\gamma,\omega}$$

De plus,

$$\varphi_{k+1} * (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x,t) = (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0)(f * \varphi_{k+1})(x,t)$$

et donc, en prenant k assez grand, le corollaire 8.3.4 montre que

$$\begin{aligned} I(k,x,t,x',t',f) := &\left| \varphi_{k+1} * (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x,t) - \varphi_{k+1} * (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x',t') \right| \\ &\leqslant C C_k \omega_0((x,t),(x',t'))^\gamma \|f\|_{\gamma,\omega} \end{aligned}$$

Et comme par ailleurs,

$$|(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x,t) - (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x,t')| \leqslant C \|f\|_{\gamma,\omega} \left(e^{|t-t'|} - 1 \right)^\gamma$$

nous pouvons conclure avec le corollaire du théorème de Frennemo énoncé dans l'appendice A. □

Nous pouvons maintenant traiter les fonctions de $\mathcal{C}_\omega^\gamma(\mathbf{X} \times \mathbb{R})$ qui s'annulent en $\pm\infty$. Cet ensemble contient par exemple les fonction hölderiennes sur $\mathbf{A} \times \mathbb{R}^d$ à support compact et valant 0 en $(a,0)$ pour tout $a \in \mathbf{A}$. Cependant, nous aimerions traiter des fonctions ne s'annulant pas en $(a,0)$ quitte à supposer que $\sum_{a \in \mathbf{A}} f(a,0) = 0$. C'est pourquoi nous démontrons le

Lemme 8.4.6. *Sous les hypothèses du théorème 8.1.1, il existe une constante C telle que pour tout $p \in \mathrm{L}^\infty(\mathbf{A})$ avec $\sum_{a \in \mathbf{A}} p(a) = 0$, pour tout $x, x' \in \mathbf{X}$ et tout $t, t' \in \mathbb{R}$,*

$$\left| (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x,t) - (G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0) f(x',t') \right| \leqslant C \|p\|_\infty \omega_0((x,t),(x',t'))$$

où nous avons noté

$$f(x,t) = p(\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x)) \psi(t)$$

et ψ la fonction définie par l'équation (8.4.1).

De plus, si $\sum_{a \in \mathbf{A}} p(a) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbf{X}$,

$$\lim_{t \to -\infty} \left(G - \frac{1}{\sigma_\rho}\Pi_0 \right) f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n p(\pi_{\mathbf{A}}(x))$$

Démonstration. Comme P commute à la dérivation, nous avons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) = -\int_t^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f'(x,u) \mathrm{d}u$$

Or, d'après la proposition 8.3.3,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f'(x,u) = \frac{1}{\sigma_\rho} \int_u^{+\infty} N_0 f'(x,s) \mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi u} U(-i\xi) p(x) \widehat{f'}(\xi) \mathrm{d}\xi$$

or,

$$\widehat{f'}(\xi) = -e^{-\xi^2/2} \text{ et } \int_u^{+\infty} N_0 f'(x,s) \mathrm{d}s = -N_0 f(x,u)$$

donc,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f'(x,u) = \frac{-1}{\sigma_\rho} N_0 f(x,u) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi u} U(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi$$

Cela montre que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) = \frac{1}{\sigma_\rho} \int_t^{+\infty} N_0 f(x,u) \mathrm{d}u - \frac{1}{2\pi} \int_t^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi u} U(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u$$

De plus, en notant $N_1 = U(0)$ et $V(z)$ tel que $U(z) = N_1 + zV(z)$, nous avons que le deuxième terme (qui ne dépend que de $\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x)$) est la somme de

$$\frac{1}{2\pi} N_1 p(x) \int_t^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi u} e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u = -N_1 p(x) \varphi(t)$$

et de

$$\frac{1}{2\pi} \int_t^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi u} (-i\xi) V(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} V(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi$$

(pour voir cette égalité, nous dérivons des deux côtés) Et donc, finalement nous trouvons que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(x,t) = \frac{1}{\sigma_\rho} \int_t^{+\infty} N_0 f(x,u) \mathrm{d}u + N_1 f(x,t) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} V(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi$$

et donc, d'après le lemme de Riemann-Lebesgue et par définition de Π_0,

$$\lim_{t\to-\infty} (G - \frac{1}{\sigma_\rho} \Pi_0) f(x,t) = \lim_{t\to-\infty} N_1 f(x,t) = N_1 f(x,-\infty)$$

Il ne reste donc plus qu'à voir que

$$N_1 f(x,-\infty) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n f(\pi_{\mathbf{A}} \circ \pi_{\mathbf{H}}(x))$$

Pour cela, notons que ces deux fonctions sont solutions de $g - Pg = f$ et comme la marche sur $\mathbf{A}$ est irréductible et apériodique, il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $a \in \mathbf{A}$,

$$N_1 p(a) = \sum_{n=0}^{+\infty} P^n p(a) + C$$

Or,

$$\sum_{a \in \mathbf{A}} N_1 p(a) = \sum_{a \in \mathbf{A}} \sum_{n=0}^{+\infty} P^n p(a) + |\mathbf{A}|C = |\mathbf{A}|C$$

et donc, $C = 0$ puisque $\sum_{a \in \mathbf{A}} N_1 p(a) = 0 = \sum_{a \in \mathbf{A}} \sum_{n=0}^{+\infty} P^n p(a)$.

Enfin, d'après la proposition 8.2.1,

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} V(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi \right| \leqslant \|p\|_\infty \int_{\mathbb{R}} C(1 + |\xi|)^L e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi$$

et

$$|t|^2 \left| \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi t} V(-i\xi) p(x) e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi \right| \leqslant \|p\|_\infty C \int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^{3L} e^{-\xi^2/2} \mathrm{d}\xi$$

ce qui termine la preuve du lemme (car $p(x)$ ne dépend que de la projection du point x sur $\mathbf{A}$). $\square$

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Restes dans le théorème taubérien de Wiener

Dans cette section, nous étudions un théorème de reste dans le théorème tauberien de Wiener.

Le but de cette section est l'étude du problème suivant : étant données deux fonctions f, φ pour lesquelles on connaît la vitesse de décroissance de $|f * \varphi|$ en l'infini, peut-on obtenir la vitesse de décroissance de $|f|$.

Le premier résultat dans ce sens est un corollaire d'un théorème tauberien de Wiener qui dit que si f est bornée, φ est intégrable, la transformée de Fourier-Laplace de φ ne s'annule pas sur $i\mathbb{R}$ et si $f * \varphi$ converge vers 0 en $\pm\infty$, alors pour toute fonction intégrable g sur $\mathbb{R}$, $f * g$ aussi converge vers 0 en $\pm\infty$.

L'intérêt de ce type de résultats pour nous est que dans l'étude de la vitesse du théorème de renouvellement, on pourra toujours régulariser les fonctions étudiées (ce qui est nécessaire pour notre méthode de passage par la transformée de Fourier) tout en gardant une vitesse de convergence.

Définition A.1. Soit f une fonction uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On dit qu'une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, continue en 0 et avec $\omega(0) = 0$ est un module de continuité uniforme pour f si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \omega(|x - y|)$$

Le théorème suivant est une adaptation du second théorème de L. Frennemo dans [Fre65].

Théorème A.2. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$.*

Soit φ_k la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $\varphi_k(x) = x^k e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

Alors, il existe une constante C ne dépendant que de k telle que pour toute fonction uniformément continue et bornée f sur $\mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(t)| \leqslant C \inf_{V \in \mathbb{R}_+^*} \left(\omega_f\left(\frac{1}{V}\right) + \frac{\|f\|_\infty}{V} + (1+V)^k \sup_{t' \in \mathbb{R}} e^{-|t'|} |\varphi_k * f(t-t')| \right)$$

où ω_f est un module de continuité uniforme (que l'on suppose croissant) de f.

Lemme A.3. *Il existe une constante C telle que pour toute fonction intégrable et uniformément continue f sur $\mathbb{R}$,*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \leqslant C \inf_{V \in \mathbb{R}_+^*} \omega_f\left(\frac{1}{V}\right) + \sup_\tau \left| \int_{-V}^{V} e^{i\xi\tau} \left(1 - \frac{|\xi|}{V}\right) \widehat{f}(\xi) \mathrm{d}\xi \right|$$

où ω_f est un module de continuité uniforme (croissant) de f.

Démonstration. Ce lemme n'est qu'une reformulation du lemme 1 de Frennemo dans [Fre65] en utilisant que si f est uniformément continue et si ω_f est un module de continuité uniforme de f que l'on suppose croissant, alors

$$-\inf_{x \leqslant t \leqslant x+1/V} f(t) - f(x) \leqslant \sup_{x \leqslant t \leqslant x+1/V} \omega_f(|x-t|) \leqslant \omega_f(1/V) \qquad \square$$

Démonstration du théorème A.2. Pour $s \in \mathbb{R}$, soit u_s la fonction définie par $u_s(t) = f(t) e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2}$.

Alors, pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |u_s(t) - u_s(t')| &= \left| e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2} (f(t) - f(t')) + f(t')(e^{-\frac{1}{2}(t-s)^2} - e^{-\frac{1}{2}(t'-s)^2}) \right| \\ &\leqslant \omega_f(|t-t'|) + \|f\|_\infty |t-t'| \sup_{u \in \mathbb{R}} |u| e^{-u^2/2} \end{aligned}$$

Et donc, la fonction u_s est uniformément continue. Comme par ailleurs, elle est intégrable, on a, d'après le lemme, pour tout $V \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |u_s(t)| \\ &\leqslant C \left(\omega_f\left(\frac{1}{V}\right) + \frac{\|f\|_\infty}{V} \sup_{u \in \mathbb{R}} |u| e^{-u^2/2} + \sup_\tau \left| \int_{-V}^{V} e^{i\xi\tau} \left(1 - \frac{|\xi|}{V}\right) \widehat{u_s}(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, Frennemo montre que

$$\sup_\tau \left| \int_{-V}^{V} e^{i\xi\tau} \left(1 - \frac{|\xi|}{V}\right) \widehat{u_s}(\xi) \mathrm{d}\xi \right| \leqslant C(1+V)^k \sup_{t' \in \mathbb{R}} e^{-|t'|} |\varphi_k * f(t-t')|$$

et cela termine donc la preuve du théorème. $\square$

Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact et $\gamma \in]0,1]$. Pour $(x,t),(x',t') \in \mathbf{X}\times\mathbb{R}$, on note

$$\omega_0((x,t),(x',t')) = \frac{\sqrt{|t-t'|^2 + d(x,x')^2}}{(1+|t'|)(1+|t|)}$$

Corollaire A.4. *Soit $(\mathbf{X}, d)$ un espace métrique compact et $\gamma \in]0,1]$.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe une constante $C_k \in \mathbb{R}_+$ et un $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tels que pour toute fonction f continue et bornée sur $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$ telle que

$$|f(x,t) - f(x,t')| \leqslant \left(e^{|t-t'|} - 1\right)^\gamma C(f), \ \|f\|_\infty \leqslant C(f)$$

et

$$|\varphi_k * f(x,t) - \varphi_k * f(x',t')| \leqslant C(f)\omega((x,t),(x',t'))$$

Alors,

$$|f(x,t) - f(x',t')| \leqslant C_k C(f)\omega((x,t),(x',t'))^\alpha$$

Démonstration. Pour $x, x' \in \mathbf{X}$ et $s \in \mathbb{R}$, on note

$$f_{x,x',s}(t) = f(x,t) - f(x', t+s)$$

Alors, pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |f_{x,x',s}(t) - f_{x,x',s}(t')| &= |f(x,t) - f(x',t+s) - f(x,t') + f(x',t'+s)| \\ &\leqslant 2C_0\left(e^{|t-t'|} - 1\right)^\gamma \end{aligned}$$

et

$$|\varphi_k * f_{x,x',s}(t)| = |\varphi_k * f(x,t) - \varphi_k * f(x',t+s)| \leqslant C(f)\omega((x,t),(x',t+s))$$

Et donc, d'après le théorème de Frennemo,

$$\begin{aligned} |f_{x,x',s}(t)| \leqslant CC(f) \Bigg(&\inf_{V\in\mathbb{R}_+^*} 2(e^{1/V}-1)^\gamma + \frac{2}{V} \\ &+ (1+V)^k \sup_{t'\in\mathbb{R}} e^{-|t'|}\omega((x,t-t'),(x',t-t'+s)) \Bigg) \end{aligned}$$

or, pour tout $t, t' \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{1+|t-t'|} \leqslant \frac{1+|t'|}{1+|t|}$$

et donc,

$$\sup_{t'\in\mathbb{R}} e^{-|t'|}\omega((x,t-t'),(x',t-t'+s)) \leqslant \omega((x,t),(x',t+s)) \sup_{t'\in\mathbb{R}} e^{-|t'|}(1+|t'|)$$

Ainsi, on a que, pour une nouvelle constante C ne dépendant pas de f,

$$|f_{x,x',s}(t)| \leqslant CC(f) \inf_{V\in[1,+\infty[} \frac{1}{V^\gamma} + (1+V)^k \omega((x,t),(x',t+s))$$

En notant désormais, pour un certain $\delta \in \mathbb{R}_+^*$ à déterminer ultérieurement,

$$V = \omega((x,t),(x',t+s))^{-\delta}$$

on trouve que, pour une nouvelle constante C ne dépendant pas de f,

$$|f(x,x',s)(t)| \leqslant CC(f)\left(\omega^{\gamma\delta} + (1+\omega^{-\gamma\delta})^k\omega\right) \leqslant CC(f)\omega^\alpha$$

pour δ assez petit et une certaine valuer de α (et où nous avons utilisé que ω est borné sur $\mathbf{X} \times \mathbb{R}$).

Cela termine donc la preuve du corollaire. $\square$

Index

Bibliographie

[Aar97] Jon Aaronson, *An introduction to infinite ergodic theory*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 50, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. MR 1450400 31

[BDP15] Dariusz Buraczewski, Ewa Damek, and Tomasz Przebinda, *On the rate of convergence in the Kesten renewal theorem*, Electron. J. Probab. **20** (2015), no. 22, 35. MR 3325092 63, 145

[BFLM11] Jean Bourgain, Alex Furman, Elon Lindenstrauss, and Shahar Mozes, *Stationary measures and equidistribution for orbits of nonabelian semigroups on the torus*, J. Amer. Math. Soc. **24** (2011), no. 1, 231–280. MR 2726604 (2011k :37008) 2, 3, 35, 36, 37, 42

[BG07] J. Blanchet and P. Glynn, *Uniform renewal theory with applications to expansions of random geometric sums*, Adv. in Appl. Probab. **39** (2007), no. 4, 1070–1097. MR 2381589 (2009e :60191) 72

[BG15] Bachir Bekka and Yves Guivarc'h, *On the spectral theory of groups of affine transformations of compact nilmanifolds*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **48** (2015), no. 3, 607–645. 2

[BIS95] A.N. Borodin, I.A. Ibragimov, and V.N. Sudakov, *Limit theorems for functionals of random walks*, Limit Theorems for Functionals of Random Walks, no. n° 195, American Mathematical Society, 1995. 2

[BL85] Philippe Bougerol and Jean Lacroix, *Products of random matrices with applications to Schrödinger operators*, Progress in Probability and Statistics, vol. 8, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1985. MR 886674 (88f :60013) 73, 74, 75, 84, 105, 135

[Bla48] David Blackwell, *A renewal theorem*, Duke Math. J. **15** (1948), 145–150. MR 0024093 (9,452a) 61

[BM00] Bachir Bekka and Matthias Mayer, *Ergodic theory and topological dynamics of group actions on homogeneous spaces*, London Mathematical Society Lecture Note Series, vol. 269, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. MR 1781937 (2002c :37002) 35

[BQ11] Yves Benoist and Jean-François Quint, *Mesures stationnaires et fermés invariants des espaces homogènes II*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), no. 5-6, 341–345. MR 2783332 (2012b :60017) 67

[BQ13] ______, *Stationary measures and invariant subsets of homogeneous spaces (III)*, Ann. of Math. (2) **178** (2013), no. 3, 1017–1059. MR 3092475 20

[BQ14] ______, *Random walks on projective spaces*, Compos. Math. **150** (2014), no. 9, 1579–1606. MR 3260142 75, 80

[BQ15] ______, *Random walks on reductive groups*, Preprint (2015). 73, 85, 99, 103, 105, 109, 122, 131, 135

[Bre60] Leo Breiman, *The strong law of large numbers for a class of Markov chains*, Ann. Math. Statist. **31** (1960), 801–803. MR 0117786 22

[Bre05] E. Breuillard, *Distributions diophantiennes et théorème limite local sur* $\mathbb{R}^d$, Probab. Theory Related Fields **132** (2005), no. 1, 39–73. MR 2136866 (2006b :60093) 72

[Bro71] B. M. Brown, *Martingale central limit theorems*, Ann. Math. Statist. **42** (1971), 59–66. MR 0290428 (44 #7609) 28

[Car83] Hasse Carlsson, *Remainder term estimates of the renewal function*, Ann. Probab. **11** (1983), no. 1, 143–157. MR 682805 (84e :60127) 63, 71, 97, 113, 131

[Com82] Jean Combes, *Suites et séries*, Presses Universitaires de France, Paris, 1982, Mathématiques. [Mathematics]. MR 657145 (83d :40001)

[DL03] Yves Derriennic and Michael Lin, *The central limit theorem for markov chains started at a point*, Probability Theory and Related Fields **125** (2003), no. 1, 73–76 (English). 2

[Dol98] Dmitry Dolgopyat, *Prevalence of rapid mixing in hyperbolic flows*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **18** (1998), 1097–1114. 66, 72

[Fre65] Lennart Frennemo, *On general Tauberian remainder theorems*, Math. Scand. **17** (1965), 77–88. MR 0193439 (33 #1659) 145, 154, 155

[FS99] Alex Furman and Yehuda Shalom, *Sharp ergodic theorems for group actions and strong ergodicity*, Ergodic Theory Dynam. Systems **19** (1999), no. 4, 1037–1061. MR 1709429 (2000i :37001) 2, 29

[Fur63] Harry Furstenberg, *Noncommuting random products*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 377–428. MR 0163345 (29 #648) 6, 61

[GC64] I. M. Guelfand and G. E. Chilov, *Les distributions. Tome 2 : Espaces fondamentaux*, Traduit par Serge Vasilach. Collection Universitaire de Mathématiques, XV, Dunod, Paris, 1964. MR 0161145 (28 #4354) 137

[GL78] M. I. Gordin and B. A. Lifšic, *Central limit theorem for stationary Markov processes*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **239** (1978), no. 4, 766–767. MR 0501277 (58 #18672) 2

[GL12] Y. Guivarc'h and E. Le Page, *Spectral gap properties for linear random walks and Pareto's asymptotics for affine stochastic recursions*, ArXiv e-prints (2012), . 6, 7, 61, 62, 82, 127

[GM96] Peter W. Glynn and Sean P. Meyn, *A Liapounov bound for solutions of the Poisson equation*, Ann. Probab. **24** (1996), no. 2, 916–931. MR 1404536 (98b :60123) 17, 19

[GR85] Y. Guivarc'h and A. Raugi, *Frontière de Furstenberg, propriétés de contraction et théorèmes de convergence*, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **69** (1985), no. 2, 187–242. MR 779457 6, 36, 61, 105, 108

[Gui06] Y. Guivarc'h, *Limit theorems for random walks and products of random matrices*, Probability measures on groups : recent directions and trends, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2006, pp. 255–330. MR 2213480 (2007i :60006) 2, 34

[HH80] P. Hall and C. C. Heyde, *Martingale limit theory and its application*, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1980, Probability and Mathematical Statistics. MR 624435 (83a :60001) 24, 28

[ITM50] C. T. Ionescu Tulcea and G. Marinescu, *Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues*, Ann. of Math. (2) **52** (1950), 140–147. MR 0037469 (12,266g) 78, 133

[Kac47] M. Kac, *On the notion of recurrence in discrete stochastic processes*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), no. 10, 1002–1010. 15

[Kes74] Harry Kesten, *Renewal theory for functionals of a markov chain with general state space*, Ann. Probab. **2** (1974), no. 3, 355–386. 127

[Kre85] Ulrich Krengel, *Ergodic theorems*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 6, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985, With a supplement by Antoine Brunel. MR 797411 (87i :28001) 20, 66

[MT93] S. P. Meyn and R. L. Tweedie, *Markov chains and stochastic stability*, Communications and Control Engineering Series, Springer-Verlag London Ltd., London, 1993. MR 1287609 (95j :60103) 17

[PW06] M. Peigné and W. Woess, *On recurrence of reflected random walk on the half-line. With an appendix on results of Martin Benda*, ArXiv Mathematics e-prints (2006). 11

[Qui05] Jean-François Quint, *Groupes de Schottky et comptage*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **55** (2005), no. 2, 373–429. MR 2147895 (2006g :37033) 96, 117

[Rau92] Albert Raugi, *Théorie spectrale d'un opérateur de transition sur un espace métrique compact*, Annales de l'institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques **28** (1992), no. 2, 281–309 (fre). 74, 75, 80

[Rud87] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k :00002) 85

[Ser78] Jean-Pierre Serre, *Représentations linéaires des groupes finis*, revised ed., Hermann, Paris, 1978. MR 543841 86

[Vil09] Cédric Villani, *Optimal transport*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 338, Springer-Verlag, Berlin, 2009, Old and new. MR 2459454 (2010f :49001) 39